Neutrale Mengen

Jan Thor, 23.7.2004

Stelle dir bitte, liebe Leserin, ein windstilles, glattes und flaches Meer vor. Oben ist Luft, unten ist Wasser. Zwischen Luft und Wasser ist eine Grenzfläche. Wir wissen, daß Luft und Wasser aus Molekülen bestehen, so daß diese Grenzfläche im Grunde eine Fiktion ist, die durch unsere vergröbernde Betrachtung entsteht. Aber stellen wir uns für einen Moment vor, der Atomismus hätte Unrecht und statt dessen hätte Aristoteles Recht, Wasser und Luft wären kontinuierliche, beliebig teilbare Substanzen. Wir können nun versuchen, Luft und Wasser mathematisch zu beschreiben. Ein naheliegendes Vorgehen wäre etwa, das Universum mit dem Raum $\mathbb{R}^3$ zu identifizieren und Luft beziehungsweise Wasser jeweils als Teilmengen dieses $\mathbb{R}^3$. Dann ist auch die Grenzfläche zwischen Luft und Wasser eine Punktmenge, eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$. Die Punkte der Grenzfläche gehören nun entweder alle zum Wasser, oder alle zur Luft, oder manche Punkte der Grenzfläche gehören zum Wasser, andere zur Luft. Aber auf jeden Fall muß jeder einzelne Punkt der Grenzfläche in diesem Modell entweder der Luft oder dem Wasser zugeordnet sein.

Dadurch aber ist dieses Modell auf ärgerliche Weise außerstande, auf befriedigende Art und Weise symmetrisch zu sein. Eigentlich hätten wir gerne, daß die Grenzfläche zwischen Luft und Wasser überhaupt keine Punkte von der Art enthält, wie sie Luft und Wasser jeweils enthalten. Die Grenzfläche sollte nur ein Gebilde sein, das durch das Aufeinandertreffen von Luft und Wasser als Abstraktion entsteht, und es sollte nicht die Notwendigkeit bestehen, die Punkte dieser Fläche entweder Luft oder Wasser zuzuordnen. Wenn wir etwa alle Punkte der Grenzfläche willkürlich dem Wasser zuordnen, dann ist das Wasser eine abgeschlossene, die Luft eine offene Punktmenge, und beide Punktmengen sind nicht länger symmetrisch.

Ich habe nun versucht, andere Modelle für ein aristotelisches Universum zu entwickeln, die in der Lage sind, die Symmetrie zwischen Wasser und Luft zu bewahren. Ich bin nicht übermäßig zufrieden mit diesen Versuchen, bin aber wohl zu phantasielos, mir etwas besseres auszudenken.

Modell 1

In diesem Modell versuchen wir, die Grenzflächen nach Möglichkeit zu ignorieren. Ausgangspunkt ist ein beliebiger topologischer Raum X mit einer zugehörigen Menge $\mathbf{O}$ von offenen Mengen. Wir bilden nun eine Teilmenge $\mathbf{O}'$ dieser Menge. Dabei soll im folgenden $\mathrm{C}(M)$ oder, wenn der Kontext diese Abkürzung erlaubt, $\mathrm{C}\,M$ das Komplement einer Menge M bezeichnen und $\mathrm{I}(M)$ beziehungsweise $\mathrm{I}\,M$ die Menge der inneren Punkte von M.

$$\mathbf{O}' := \left\{ M \subseteq X \,\middle|\, \exists O \in \mathbf{O} : M = \mathrm{ICIC}\,O \right\}$$

Wir definieren des weiteren eine Funktion C' als

$$\mathrm{C}'M = \mathrm{IC}\,M$$

Und wir definieren zwei Verknüpfungen $\cup'$ und $\cap'$:

$$N \cap' M = \mathrm{ICIC}(N \cap M)$$
$$N \cup' M = \mathrm{ICIC}(N \cup M)$$

Dann gilt: $\mathbf{O}'$ bildet bezüglich C', $\cap'$ und $\cup'$ eine boolesche Algebra (der Beweis besteht darin, die entsprechenden Axiome nachzurechnen, was mühsam und wenig erkenntnisträchtig ist, weshalb ich an dieser Stelle darauf verzichte. Tipp: zeige für eine beliebige Menge $M \subseteq X$, daß $\mathrm{ICICICI}\,M = \mathrm{ICI}\,M$; diese Kürzungsregel läßt sich dann im Nachweis der einzelnen Axiome einsetzen).

In diesem Modell können wir Luft und Wasser als Elemente aus $\mathbf{O}'$ deuten, wobei Luft das „Komplement" von Wasser ist. Das Modell ist alles andere als beeindruckend, aber es vermeidet halbwegs erfolgreich alle exotischeren Arten von Mengen, mit denen Aristoteles sowieso nichts hätte anfangen können. Im allgemeinen ist $\mathbf{O}'$ echt kleiner als $\mathbf{O}$, und die Operationen C', $\cap'$ und $\cup'$ unterscheiden sich von den Operationen C, $\cap$ und $\cup$. Konkret könnte eine Modellierung etwa so aussehen:

$$X = \mathbb{R}^3$$
$$Wasser = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 < 0\}$$
$$Luft = \mathrm{C}'(Wasser)$$

Modell 2

In diesem Modell versuchen wir nicht, die Grenzfläche gänzlich zu ignorieren, aber wir betrachten die Punkte dieser Fläche als Punkte von anderer Qualität als die Punkte im Inneren von Wasser oder Luft.

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist auch hier wieder ein topologischer Raum X mit einer Menge $\mathbf{O}$ von offenen Mengen.

Eine Menge $M \subseteq X$ können wir deuten als eine charakteristische Funktion, also eine Funktion $\chi_M : X \to \{0,1\}$ mit $\chi_M(x) = 0$ für $x \notin M$ und 1 für $x \in M$. Die Potenzmenge $\mathbf{P}(x)$ aller Teilmengen von X können wir identifizieren mit der Menge $\mathbf{P}$ aller Abbildungen der Menge X in die Menge $\{0,1\}$. Die Menge der offenen Mengen $\mathbf{O}$ können wir identifizieren mit der entsprechenden Teilmenge $\mathbf{O} \subseteq \mathbf{P}$ von charakteristischen Funktionen offener Mengen.

Wir betrachten nun des weiteren die Menge $\mathbf{Q}$ aller Abbildungen von X nach $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Dabei können wir $\mathbf{P}$ mit einer Teilmenge von $\mathbf{Q}$ identifizieren, nämlich der Teilmenge jener Abbildungen von X nach $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, die auf die Funktionswerte 0 und 1 beschränkt sind.

Auch auf dieser Menge $\mathbf{Q}$ wollen wir nun wieder eine boolesche Algebra definieren. Seien f und g Elemente von $\mathbf{Q}$. Dann ist

$$\begin{gathered} \mathrm{C}\, f(x) = 1 - f(x) \\ f \cap g(x) = \min\left(f(x), g(x)\right) \\ f \cup g(x) = \max\left(f(x), g(x)\right) \end{gathered}$$

Damit ist $(\mathbf{Q}, \mathrm{C}, \cap, \cup)$ eine boolesche Algebra. Für die Unteralgebra $\mathbf{P}$ stimmt die so definierte boolesche Algebra mit der gewöhnlichen booleschen Algebra auf X überein.

Unter einer „gewöhnlichen Menge“ verstehen wir nun ein Element von $\mathbf{P}$. Unter einer „verallgemeinerten Menge“ verstehen wir ein Element von $\mathbf{Q}$. Sei $f \in \mathbf{P}$. Für ein $x \in X$ können wir folgenden Sprachgebrauch vereinbaren:

$f(x) = 0$
$\leftrightarrow$ „x ist ein Element des Komplements von f“
$\leftrightarrow$ $x \notin f$

$f(x) = 1$
$\leftrightarrow$ „x ist ein Element von f“
$\leftrightarrow x \in f$

$f(x) = \frac{1}{2}$
$\leftrightarrow$ „x ist unentschieden bezüglich f“
$\leftrightarrow$ $x \sim f$

Unser ursprüngliches Problem von Wasser und Luft können wir nun folgendermaßen modellieren: sei $X = \mathbb{R}^3$. Wir definieren

$$\begin{gathered} \mathit{wasser}\left(x_1, x_2, x_3\right) = 0 \text{ für } x_1 > 0; \tfrac{1}{2} \text{ für } x_1 = 0; 1 \text{ für } x_1 < 0 \\ \mathit{luft} = \mathrm{C}\left(\mathit{wasser}\right) \end{gathered}$$

Modell 3

Die Idee in diesem Modell ist, die Grenzfläche zwischen Wasser und Luft zu verdoppeln und ein Exemplar Wasser, das andere Exemplar Luft zuzuordnen.

Erneut beginnen wir mit einem topologischen Raum X und der Menge $\mathbf{O}$ der offenen Mengen in diesem Raum. Wir bilden nun den neuen Raum $Y = X \times \{0,1\}$ und definieren auf Y die durch die Topologie $\mathbf{O}$ induzierte Topologie $\mathbf{O}'$ folgendermaßen:

$$\mathbf{O}' = \left\{ O' \middle| \exists O \in \mathbf{O} : O' = O \times \{0\} \cup O \times \{1\} \right\}$$

Ein „roter“ Oger ist nun definiert als eine Menge G, für die gilt:

Für alle Randpunkte y bezüglich G gilt, wenn $y = (x,s)$ mit $x \in X$ und $s \in \{0,1\}$, dann ist $y \in G$ genau dann, wenn $s = 0$ ist.

Ein „grüner“ Oger ist das Komplement eines roten Ogers.

Alternativ ist auch folgende Begrifflichkeit möglich:

Sei $M \subseteq Y$ und $x \in X$.

Der Punkt x heißt „weiß“, falls $(x,0)$ und $(x,1)$ beide $\in M$. Er heißt „schwarz“, falls weder $(x,0)$ noch $(x,1)$ $\in M$. Er heißt „rot“, falls $(x,0)$, aber nicht $(x,1)$ $\in M$. Er heißt „grün“, falls $(x,1)$, aber nicht $(x,0)$ $\in M$ ist.

Übertragen heißt auch ein Punkt (x,s) „weiß“, „schwarz“, „rot“ oder „grün“, wenn x die entsprechende Eigenschaft besitzt.

Für jede Menge sind alle inneren Punkte weiß. Eine offene Menge ist eine Menge, für die alle Randpunkte schwarz sind. Eine abgeschlossene Menge ist eine Menge, für die alle Randpunkte weiß sind. Ein roter Oger ist eine Menge, für die alle Randpunkte rot sind, ein grüner Oger ist eine Menge, für die alle Randpunkte grün sind.

Wasser und Luft können wir nun folgendermaßen modellieren:

$$X = \mathbb{R}^3.$$
$$wasser = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \middle| x_1 < 0 \vee (x_1 = 0 \wedge s = 0) \right\}$$
$$luft = \mathrm{C}(wasser)$$

Wasser ist in diesem Modell ein roter Oger, Luft ein grüner. Leider hat die Menge der roten beziehungsweise grünen Oger ausgesprochen schwache Abschlußeigenschaften, so daß sich in praktischer Hinsicht wenig mit dem Modell anfangen läßt. Es erweist sich auch als ausgesprochen unbefriedigend, wenn mehr als zwei Mengen (etwa Wasser, Luft und Erde) zusammen stoßen.

Weitere Modelle:

Ich habe mir einige ziemlich komplizierte Dinge ausgedacht, bei denen eine „neutrale“ Menge nur ihre oberen und rechten Randpunkte enthält, die unteren und linken Randpunkte dagegen dem Komplement zugeordnet sind, aber leider funktioniert nichts dergleichen zu meiner Befriedigung. Selbst in der vergleichsweise wohlvertrauten gewöhnlichen Topologie des $\mathbb{R}^n$ können derart wilde Dinge geschehen, daß es schwierig sein kann zu entscheiden, was denn nun ein rechter oberer und was ein linker unterer Randpunkt ist, so daß ich diese Versuche aufgegeben habe. Es wäre möglich, die in Modell 1 definierten speziellen offenen Mengen aus $\mathbf{O}'$ entsprechend aufzupeppen, so daß sie um ihre oberen (und rechten und vorderen, etc.) Randpunkte ergänzt werden, aber diese Erweiterung scheint mir gegenüber Modell 1 nichts wesentlich neues zu liefern.

Ein anderer Ansatz, der mir in den Sinn gekommen ist, ist, mit einer Art von CW-Komplexen zu beginnen und dann wie in Modell 3 die Grenzfläche zweier Gebiete zu verdoppeln und ein Exemplar dem einen, das andere Exemplar dem anderen Gebiet zuzuordnen. In einer früheren Skizze findet sich das Paradox, daß ein Würfel 48 Ecken enthält: dieses Paradox ist ein Überbleibsel meiner Überlegungen zu „verbesserten“ CW-Komplexen, aber letztlich habe ich diese Idee bisher nicht weiter verfolgt, da ich mich mehr mit Ansätzen beschäftigt habe, beliebige topologische Räume zu aristotelisieren.

Das Bedürfnis, ein System von Teilmengen eines Raumes zu besitzen, das im Gegensatz zum System der offenen Mengen auch gegen Komplementbildung abgeschlossen ist, läßt sich leicht durch den Übergang von den offenen Mengen zu der von ihnen erzeugten σ-Algebra befriedigen. Aber auch eine σ-Algebra löst natürlich nicht das Problem, die Grenzfläche zwischen Wasser und Luft entweder Wasser oder Luft zuordnen zu müssen.

Es sind noch weitere Ideen möglich. Beispielsweise könnten wir beim Übergang von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ zwischen „Limes von oben“ und „Limes von unten“ unterscheiden, und im $\mathbb{R}^n$ Randpunkte aufspalten je nachdem wir aus dem Inneren oder von außen kommend gegen einen Randpunkt konvergieren. Aber auch hier wieder stellt sich das Problem, daß im $\mathbb{R}^n$ reichlich bizarre Mengen existieren, für die es nicht trivial ist, eine Konvergenz von innen und von außen zu unterscheiden, so daß ich auch diese Idee nicht weiter verfolgt habe. Letztlich handelt es sich um ein unbegrenztes und uferloses Gebiet, wenn wir fragen, was wir an die Stelle vertrauter Begriffe wie „reelle Zahl“, „Limes“ oder „offene Menge“ setzen sollten. Für heute soll es deshalb damit genug sein.