Jan Thor

Die wunderbare Welt des Anaxagoras

‹ὄψις γὰρ τῶν ἀδήλων τὰ φαινόμενα›, ὥς φησιν Ἀναξαγόρας, ὃν ἐπὶ τούτῳ Δημόκριτος ἐπαινεῖ.

SEXTUS EMPIRICUS

Inhalt

1 Die Geschichte einer Interpretation

1.1 Einleitung

Vor einiger Zeit habe ich verschiedene meiner Texte mit kurzen Hinweisen auf den Philosophen Anaxagoras gespickt. Ich wies darauf hin, daß Anaxagoras eine Physik entwickelt habe, die zwar nach allem, was wir wissen, vollkommen falsch ist, aber dafür so schön, daß es beinahe schade ist, daß wir nicht in der Welt leben, die Anaxagoras skizziert hat.

Verwendet habe ich die Physik des Anaxagoras etwa in einer Diskussion des freien Willen, des Determinismus und des Laplaceschen Dämonen, um zu zeigen, daß selbst unter sehr günstigen (nämlich eben anaxagorischen) Voraussetzungen der Laplacesche Dämon kein Bestandteil unserer Welt sein kann (siehe 4.2, wo ich diese Argumentation wiederhole).

Dabei wies ich darauf hin, daß sich die Physik des Anaxagoras eigentlich erst mit Hilfe neuerer mathematischer Begriffe in ihrem ganzen begrifflichen Reichtum erfassen lasse. Und ich murmelte geheimnissvoll von gewissen „Besicovitch-Mengen", die quasi unerläßlich seien, um Anaxagoras zu verstehen.

Inzwischen habe ich aber erneut über Anaxagoras nachgedacht und bin zu dem Schluß gekommen, daß meine früheren Behauptungen über Anaxagoras nicht unbedingt von dem erhaltenen Text gedeckt werden und daß auch andere Interpretationen möglich sind. Ich will deshalb so vorgehen, daß ich zunächst meine ursprüngliche Interpretation, die Interpretation 1 (die in zwei Varianten, Interpretation 1a und 1b, daherkommt), vorstelle (1.2). In einem zweiten Abschnitt versuche ich zu erklären, warum mir Zweifel an dieser Interpretation gekommen sind, und stelle eine weitere mögliche Interpretation vor (1.3). In späteren Kapiteln werden wir dann einen Blick in die erhaltenen Textfragmente werfen, um zu entscheiden, was Anaxagoras wirklich gemeint haben könnte, nachdem wir kurz ein wenig in das mathematische Räderwerk der verschiedenen Interpretationen hinabgestiegen sind.

1.2 Die Interpretationen 1a und 1b: Stoffe und Elemente

Die Welt besteht aus verschiedenen Stoffen, etwa Fleisch, Haare, Knochen, Brot, Getreide &c. Wir nehmen an, es gäbe n verschiedene derartige Stoffe, also endlich viele. Im Universum kommen Ansammlungen dieser Stoffe vor, etwa in einer Gegend, die wir als Fleisch bezeichnen würden. Es ist nun aber so, daß kein Stoff jemals in Reinform vorliegt. Wenn wir irgendwo Fleisch finden, dann enthält dieses Fleisch stets auch Haare und Knochen. Darüber hinaus enthält auch jeder noch so kleine Teil dieses Fleisches (das sich beliebig und unbegrenzt teilen läßt) Haare und Knochen (und alle anderen Stoffe). Haare wiederum enthalten auch Fleisch und Knochen (und alle anderen Stoffe), und Knochen enthalten Fleisch und Haare (und alle anderen Stoffe). Wie ist so etwas nun möglich und vorstellbar?

Nun, um zu erklären, wie eine derart schwindelerregende Ontologie möglich ist, unterscheiden wir begrifflich zwischen den Elementen e_1 bis e_m und den Stoffen S_1 bis S_n. In meiner ursprünglichen Deutung ist m = n, und jeder Stoff entspricht genau einem Element. Das Universum identifizieren wir mit dem mathematischen Raum $\mathbb{R}^3$, wobei wir zeitliche Veränderungen erst einmal außer Betracht lassen. Jeder Punkt des Universums, also jedes $x \in \mathbb{R}^3$, gehört genau einem der Elemente e_i an. Ein „Ding" in unserem Universum ist nun nichts anderes als eine (der Einfachheit halber) kompakte und zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ mit positivem Volumen (für

Nichtmathematiker: ein Ding ist mehr oder weniger ein Ort im Universum, der aus unendlich vielen Punkten besteht). Grob gesagt, besteht ein Ding genau dann aus dem Stoff S_i, wenn die einzelnen Punkte in ihm, seine Atome, mehrheitlich dem Element e_i angehören. Es ist aber so, daß die Menge der Punkte/atomaren Orte, die einem bestimmten Element e_i angehören, dicht im $\mathbb{R}^3$ liegen, das heißt, es gibt keinen noch so kleinen Bereich des Universums, der keine Punkte enthält, die zu e_i gehören. Noch einmal anders formuliert: Überall sind Punkte des Elements e_i untergemengt.

Es gibt also kein Ding, das nur Punkte eines einzigen Elements enthält. Jedes Ding enthält unendlich viele Punkte jeden Elements. „Stoff“ S_i bedeutet ja nun lediglich: Mehrheit von Punkten von e_i. Da jedes Ding Atome aller Elemente enthält, gibt es keinen reinen Stoff, und wir können sagen, daß jeder Stoff jeden anderen Stoff enthält.

Phänomenologisch sind uns natürlich nur die Dinge und die Stoffe gegeben. Die reinen, unvermischten Elemente sind niemals der Beobachtung zugänglich und stets verborgen. Dies ist aber keine Katastrophe: hat doch schon Anaxagoras gesagt, Anblick der nichtoffenkundigen seien die erscheinenden Dinge (siehe auch das Motto des Titelblattes).

Mathematisch gesehen, ist „Anzahl“ oder „Anteil“ der Punkte=Atome eines Dinges, die zu e_i gehören, sehr vage. In jedem Ding sind unendlich viele, sogar überabzählbar viele Atome jeden Elements, es nützt also nichts, die Mächtigkeit, also die Anzahl im wörtlichen Sinn, zu bestimmen. Die mathematische Seite des Problems läßt sich lösen durch die Verwendung bestimmter Maße und Mengen, wobei die Mengen in der Regel fraktal sein werden, wie etwa die Besicovitch-Menge. Auf diese mathematischen Modelle werden wir im zweiten Kapitel genauer eingehen, an dieser Stelle mag genügen, daß sich die entsprechenden mathematischen Probleme lösen lassen.

Wenn wir ein Stück Fleisch vor uns haben, dann besteht dieses Stück Fleisch vielleicht zu achtzig Prozent aus Fleisch-Atomen, zu 5 Prozent aus Haar-Atomen, zu 5 Prozent aus Knochen-Atomen, zu 10 Prozent aus anderen Elementen. Hier gibt es nun zwei Möglichkeiten: wir können annehmen, daß das Stück Fleisch in sich homogen ist, oder inhomogen. Je nachdem, für welche Möglichkeit wir uns entscheiden, gelangen wir zu zwei verschiedenen Interpretationen. Die Möglichkeit, das Fleisch als homogen zu sehen, führt zur Interpretation 1a, die Möglichkeit, das Fleisch als inhomogen zu sehen, zur Interpretation 1b.

Nehmen wir an, das Stück Fleisch ist homogen. Das heißt, wenn wir aus dem Stück Fleisch ein beliebig kleines Stück Fleisch herausschneiden, dann besteht auch dieses kleine Stück Fleisch zu 80 Prozent aus Fleisch, zu 5 Prozent aus Haar &c. Das ganze All als solches kann natürlich nicht homogen sein, in dieser Interpretation ist es aber so, daß einzelne Teile des Universums homogen sind: für ein homogenes Ding hat jeder Teil des Dinges das gleiche Mischverhältnis. Ein solches homogenes Ding besteht aus selbstähnlichen Teilen (davon zu unterscheiden sind „homoiomerische“ Dinge, auf die wir erst im dritten Kapitel eingehen werden). Erst wenn ich Fleisch esse, wird das im Fleisch vorhandene Haar ausgesondert und meinem eigenen Haar hinzugefügt (das natürlich auch Fleisch und Knochen enthält).

Streng genommen, können wir in dieser Deutung nicht sagen, jeder Stoff enthalte jeden anderen Stoff, wenn wir unter Stoff S_i „Überwiegen des Elementes e_i“ verstehen. Denn das Fleisch in unserem Beispiel enthält ja nirgendwo ein Teil, indem das Fleisch nicht (mit seinen achtzig Prozent) überwiegen würde. Das heißt, das Fleisch als Stoff enthält zwar Atome des Elements Haar, aber keinen Stoff Haar. Das Fleisch enthält den Stoff Haar nur potentiell in dem Sinn, daß das Haar aus ihm so ausgesondert werden könnte, daß ein Ding aus Haar entstünde. Der homogene Stoff enthält alle anderen Stoffe nur potentiell, nicht aktual, er enthält aber aktual Atome aller Elemente.

Nehmen wir nun an, das Fleisch sei nicht homogen. Als Ganzes besteht es zwar zu achtzig Prozent aus Fleisch, einzelne Teile des Fleisch enthalten aber mehr oder weniger Fleisch. Es kann sogar sein, daß in einem kleinen Teil des Fleisches der Fleisch-Anteil so verdünnt ist, daß der Haar-Anteil überwiegt, so daß wir diesen Teil als Haar bezeichnen müssen. Und dieses Stück Haar innerhalb des Fleisches könnte wieder einen kleineren Teil enthalten, in dem wieder der Fleisch-Anteil oder der Knochen-Anteil überwiegt.

In dieser Deutung enthält jedes Stück Fleisch nicht nur Haar und Knochen, sondern einzelne Stücke, in denen der Haar-Anteil oder der Knochen-Anteil überwiegt, also Stücke von Haar und Knochen. Jeder Stoff enthält damit aktual jeden anderen Stoff.

Bisher sind wir von einer naiven prästabilierten Harmonie zwischen Stoffen und Elementen ausgegangen, daß heißt, ein Stoff S_i entsteht, wenn in einem Ding das Element e_i überwiegt. Wir können uns die Dinge aber auch komplizierter denken und bestimmte phänomenologische Stoffe als spezielle Mischungen bestimmter Elemente deuten. Ein Ding bestünde in dieser Deutung beispielsweise aus dem Stoff Milch, wenn die Atome des Elements Weiß häufiger vorkommen als die Atome des Elements Schwarz und die Atome des Elements Feucht häufiger als die Atome des Elements Trocken, aus dem Stoff Wasser dagegen, wenn die Elemente Schwarz und Feucht gegenüber den Elemente Weiß und Trocken überwiegen. Auch hier wieder kann das Ding, das aus dem Stoff Milch besteht, homogen sein oder nicht. Wenn es nicht homogen ist, dann enthält es beispielsweise Teile, in denen das Element Schwarz das Element Weiß überwiegt, das heißt, das Ding aus dem Stoff Milch enthält einen Teil aus dem Stoff Wasser. Auch hier würde jeder Stoff jeden anderen Stoff enthalten, es wäre aber schwierig bis unmöglich, die Natur der Elemente aus den phänomenologischen Daten zu rekonstruieren.

1.3 Die Interpretation 2: Stoffe ohne Elemente

An dieser Stelle meiner Überlegungen, als ich über das Verhältnis von Stoffen und Elementen nachdachte, kam mir der Gedanke: wie komme ich eigentlich dazu, zwischen Stoffen und Elementen zu unterscheiden, wo doch diese Unterscheidung sich, soweit ich mich erinnern kann, gar nicht bei Anaxagoras findet? Ist es nicht vielleicht so, daß ich Anaxagoras solche Ideen unterstelle, wie sie sich gerade noch innerhalb meines eigenen beschränkten Horizontes befinden, während Anaxagoras etwas ganz anderes, erstaunlicheres und originelleres im Sinn hatte?

Anaxagoras zufolge ist jeder Stoff in jedem anderen enthalten. Von Punkten, Atomen oder Elementen ist nicht die Rede. Wir können auch nicht den $\mathbb{R}^3$ als Modell unseres Universums heranziehen. Denn dieser $\mathbb{R}^3$ besteht aus infinitesimal kleinen Punkten, von deren Existenz Anaxagoras nichts hat verlauten lassen. Um zu rekonstruieren, was Anaxagoras gemeint haben könnte, wäre es deshalb angemessener, keine moderne mathematische Struktur zu verwenden, die bestimmte ontologische Entscheidungen in unzulässiger Weise bereits vorwegnimmt.

Wenn wir unterstellen, jeder Stoff enthalte jeden anderen Stoff, dann müssen wir gründlich kontrollieren, welche Voraussetzungen der orthodoxen Mathematik dem widersprechen könnten. Denn eventuell war die Theorie des Anaxagoras ja gar nicht nur als Physik gedacht, sondern es handelt sich darüber hinaus um eine Theorie der Mathematik und der Logik, und wenn wir sie bloß als physikalische Theorie auffassen und innerhalb unserer modernen Mathematik und Logik zu beschreiben versuchen, versäumen wir möglicherweise den interessantesten Teil der Theorie des Anaxagoras.

Nochmals: Jeder Stoff enthält jeden anderen Stoff. Ein Ding aus einem Stoff können wir nicht auffassen als eine Menge von Punkten des $\mathbb{R}^3$. Es scheint aber, als dürften wir wenigstens die

Begriffe der Mengentheorie weiterhin verwenden, denn „enthalten" ist ja unmittelbar ein mengentheoretischer Begriff, und der Begriff der Menge ist derart allgemein, daß wir Stoffe wohl als Mengen auffassen dürfen. Die Aussage, daß jeder Stoff jeden anderen Stoff enthält, wäre demnach eine Aussage über die Enthaltenseinsrelationen zwischen bestimmten Mengen.

Damit aber haben wir uns unvermittelt Schwierigkeiten ganz neuer Art eingehandelt. Denn die gewöhnlichen, orthodoxen Axiomatisierungen der Mengentheorie, die Systeme von Zermelo und Fraenkel beziehungsweise von Neumann, Bernay und Gödel, lassen derartige Enthaltenseinsrelationen gar nicht zu, weil sie dem Fundierungsaxiom wiedersprechen.

Eine erstaunliche neue Deutung bestünde demnach darin, zu sagen, die Stoffe des Anaxagoras müßten nicht nur ohne den Rekurs auf Elemente begriffen werden, sondern setzten darüber hinaus auch noch eine Mathematik voraus, in der das Fundierungsaxiom falsch ist.

An dieser Stelle bieten sich zwei Dinge an: zum einen, einen genaueren Blick auf die mathematischen Grundlagen unserer Überlegungen zu werfen und zu fragen, wie die verschiedenen Modelle im Detail aussehen und wie überhaupt eine Alternative zum Fundierungsaxiom aussehen könnte. Eben dies werden wir im folgenden Kapitel tun. Zum anderen dürfte es nichts schaden, einen Blick in den Urtext zu werfen. Den Fragmenten des Anaxagoras wenden wir uns im dritten Kapitel zu.

2 Mathematische Modelle

2.1 *Vorbemerkung*

Ich entwickle im folgenden einige mathematische Modelle, die geeignet erscheinen, die Physik des Anaxagoras in ihren verschiedenen Interpretationen darzustellen. Dabei erläutere ich zuerst den Begriff der Besicovitch-Menge (2.2). Die folgenden beiden Abschnitte (2.3 - 2.4) stellen alternative Modelle vor, die auf dem wohlbekannten Lebesgue-Borelschen Maß beruhen. Schließlich betrachte ich Alternativen zum gewöhnlichen Fundierungsaxiom (2.5). Dieses Kapitel setzt die Kenntnis elementarer mathematischer Begriffe voraus, insbesondere Vertrautheit mit grundlegenden Konzepten der Maßtheorie und der Mengenlehre, außerdem sind Kenntnisse der fraktalen Geometrie hilfreich. Für Nichtmathematiker findet sich im letzten Abschnitt dieses Kapitels (2.6) eine kurze Zusammenfassung der Ergebnisse.

Ich beschränke mich im folgenden auf ein endliches eindimensionales Universum der Form $\Omega = [0, 1[$. Diese Beschränkung dient lediglich der Vermeidung von Schwierigkeiten rein technischer Natur. Alle Modelle lassen sich leicht für $\mathbb{R}^3$ verallgemeinern, erfordern dann aber gewöhnlich wenigstens einen zusätzlichen Index und werden unnötig unübersichtlich. Für dieses Universum, den Raum Ω, wollen wir erklären, was es bedeutet, verschiedene Stoffe zu enthalten, von denen jeder Stoff jeden anderen enthält.

2.2 *Besicovitch-Mengen*

Eine Besicovitch-Menge kann verwendet werden, um die Verteilung von Bodenschätzen oder (ähnlich dem bekannten Cantor-Staub) von Rauschen in einer Übertragung zu beschreiben. Meines Wissens wird von dieser Möglichkeit allerdings bislang kaum praktischer Gebrauch gemacht. Die Besicovitch-Menge gehört zu den Fraktalen, ist aber eines der eher unbekannteren. Für bunte Bilder eignet sie sich weniger, da sie die Eigenschaft hat, dicht auf ganz Ω zu sein.

Sei r eine natürliche Zahl ≥ 2. Gegeben sind nun Gewichte W_1 bis W_r mit folgenden Eigenschaften:

1. $\sum_{i=1}^{r} W_i = r$
2. $\neg \forall i \leq r\colon W_i = 1$
3. $\forall i \leq r\colon W_i > 0$

Die zweite und dritte Bedingung sollen lediglich garantieren, daß im Folgenden etwas halbwegs Interessantes passiert. Für $r = 3$ und $W_1 = W_3 = 1{,}5$ und $W_2 = 0$ ist die dritte Regel verletzt. Das Ergebnis wäre, wie wir weiter unten sehen werden, keine Besicovitch-Menge, sondern der klassische Cantorstaub.

Zu unserer Bequemlichkeit führen wir außerdem normierte Gewichte $\pi_i = \frac{W_i}{r}$ ein.

Die Besicovitch-Menge entsteht nun durch folgende Iteration:

In einem ersten Schritt zerlegen wir Ω in r gleich große Teilintervalle. Dem i-ten Teilintervall ordnen wir die Masse π_i beziehungsweise die Dichte W_i zu. Im zweiten Iterationsschritt wird jedes Teilintervall in r kleinere Teilintervalle zerlegt. Dabei entstehen Teilintervalle mit den Dichten W_1W_1, W_1W_2, ..., W_1W_r, W_2W_1, W_2W_2, ..., W_2W_r, ..., W_rW_1, W_rW_2, ..., W_rW_r. Im i+1-ten Iterationsschritt wird jedes Intervall des i-ten Iterationsschritt in r Teilintervalle zerlegt, wobei dem j-ten Teilintervall als Dichte die Dichte aus dem letzten Iterationsschritt mal W_j zugeordnet wird.

Die Besicovitch-Menge B besteht nun aus allen Punkten, für die die Dichte nicht gegen Null konvergiert. Wir denken uns einen Punkt x in seiner Darstellung zur Basis r. Sei $k_i(x)$ die relative Häufigkeit der Ziffer i - 1 in der Darstellung von x. B besteht damit aus allen Punkten $x \in \Omega$ mit

$$\prod_{i=1}^{r} W_i^{k_i(x)} \geq 1$$

(was zugleich eine alternative Definition von B ergibt). Einem Ergebnis von Billingsley zufolge besitzt B eine Hausdorff-Dimension von

$$D_H(B) = -\frac{\sum_{i=1}^{r} \pi_i \log \pi_i}{\log r}$$

Je nach Wahl der W_i liegt diese Dimension beliebig in]0, 1[.

Durch B ist auf Ω ein Maß μ_B gegeben. Ein Intervall [a, b[aus Ω hat ein Maß μ_B entsprechend der Dichte von B in diesem Intervall, also beispielsweise

$$\mu_B([0,1[) = 1$$

$$\mu_B([0,\frac{1}{r}[) = \pi_1$$

$$\mu_B([0,\frac{1}{r^2}[) = \pi_1^2$$

Das Maß μ_B mißt natürlich nicht nur halboffene Intervalle, sondern beliebige Borelmengen auf Ω.

In unserer physikalischen Deutung entspricht Ω einem bestimmten Stoff, der einen anderen Stoff, B, enthält. Für jedes nicht leere Intervall [a, b[mit $0 \leq a < b \leq 1$ gilt $\mu_B([a,b[) > 0$, jeder noch so kleine Teil von Ω enthält mithin eine bestimmte Konzentration von B.

Ω soll nun nicht nur einen, sondern etwa n viele verschiedene Stoffe enthalten. Gegeben seien etwa Stoffe B_1 bis B_n mit einem jeweiligen Anteil am Gesamtraum Ω von b_j für B_j (wobei wir davon ausgehen dürfen, daß die Summe aller b_j gerade 1 ergibt). Dann benötigen wir r · n Gewichte $W_{i,j}$. Daraus entwickeln wir n verschiedene Besicovitch-Mengen B_j. Wir müssen dazu fordern:

1. $\forall j \leq n : \sum_{i=1}^{r} W_{i,j} = b_j r$

2. $\forall j \leq n : \neg \forall i \leq r : W_{i,j} = 1$

3. $\forall j \leq n : \forall i \leq r : W_{i,j} > 0$

Sinnvollerweise werden wir auch verlangen, daß für ein gegebenes (nicht leeres) Intervall [a, b[alle n Stoffe zusammen gerade die Dichte 1 haben, also

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_{B_j}([a,b[) = b - a$$

beziehungsweise

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_{B_j} = \lambda^1$$

wobei λ^1 das Lebesgue-Borelsche Maß auf Ω bezeichnet. Wir ergänzen also unsere Bedingungen:

4. $\forall i \leq r : \sum_{j=1}^{n} W_{i,j} = 1$

Es handelt sich hier um eine Realisierung der inhomogenen Deutung (der Deutung 1b) des Anaxagoras. Bei geeigneter Wahl der $W_{i,j}$ (und hinreichend großem r) gibt es für jeden Stoff B_j Gegenden der Welt Ω, in denen B_j beliebig dicht wird; mehr noch: nicht nur Ω enthält solche Gegenden, sondern jede Gegend von Ω enthält solche Gegenden.

Wollen wir dagegen eine homogene Deutung (die Deutung 1a) mit Hilfe von Maßen verwirklichen, dann ist das Ergebnis recht langweilig. Wir wählen dazu schlichtweg

$$\mu_j = b_j \lambda^1$$

und sind bereits fertig.

2.3 Cantorstaubkomplemente

Der Zugang über Dichtefunktionen beziehungsweise Besicovitch-Mengen ist in gewisser Weise unbefriedigend. Wenn wir unter dem Anteil von A_i die Länge von A_i verstehen, gemessen im gewöhnlichen Lebesgue-Borel-Maß, dann hat eine Besicovitch-Menge stets die Länge 0 (unvermeidlicherweise, da ja die Hausdorff-Dimension einer solchen Menge kleiner als 1 ist). Wir könnten auf die Idee verfallen, statt dessen eine Menge A zu suchen mit

$$A \subseteq \Omega$$
$$\forall c, d \in \mathbb{R}, 0 \leq c < d \leq 1 : 0 < \lambda^1([c, d[\cap A) < d - c$$

d.h., in jedem beliebigen Intervall besitzt sowohl A als auch sein Komplement eine nicht verschwindende Länge. Es läßt sich konstruktiv beweisen, daß es eine solche Menge gibt, das Beispiel, das mir dazu eingefallen ist, ist technisch allerdings ein wenig verwickelt, und die Konstruktion ist nicht ganz leicht zu durchschauen.

Wir beginnen mit einer Betrachtung des gewöhnlichen Cantor-Staubes. Dieser entsteht bekanntlich, indem wir aus dem Einheitsintervall das mittlere Drittel entfernen, dann aus den beiden verbleibenden Dritteln jeweils das mittlere Drittel (also jeweils ein Neuntel des Einheitsintervalls) entfernen, aus den verbleibenden vier Neunteln jeweils das mittlere Drittel entfernen, und so weiter. Etwas technischer läßt sich das Rezept für die Herstellung des Komplements des Cantorstaubes (der Menge seiner Tremata), die uns im folgenden mehr als der eigentliche Cantorstaub interessieren wird, so beschreiben:

$$K_{i,j} = \left[\frac{3j-2}{3^i}, \frac{3j-1}{3^i}\right[$$

$$K_i = \bigcup_{j=1}^{2^{i-1}} K_{i,j}$$

$$K = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß die Länge von K gerade 1 beträgt, der Cantorstaub also eine Lebesgue-Nullmenge ist (gewöhnlich wird der Cantorstaub auch genau dazu verwendet, staunenden Erstsemestlern zu zeigen, daß es überabzählbare Nullmengen gibt). Wir können nun das Cantorstaubkomplement so modifizieren, daß die Gesamtlänge weniger als 1 beträgt (und statt dessen einen beliebigen Wert zwischen 0 und 1 annimmt). Dazu schneiden wir aus den verbleibenden Teilstücken nicht jeweils $\frac{1}{3}$, sondern kleinere Teilstücke als Tremata heraus. Hier ergibt sich eine Doppeldeutigkeit der ursprünglichen Konstruktion: sollen wir einen festen Bruchteil $\frac{1}{r}$ des verbleibenden Teilstückes oder einen Anteil $\frac{1}{r^i}$ des Einheitsintervalls herausschneiden? In der ursprünglichen Konstruktion haben die verbleibenden Teilstücke gerade die Länge $\frac{1}{r^{i-1}}$, so daß beides das gleiche Ergebnis liefert. Wir entscheiden uns nun, aus praktischen Gründen, für das zweite Vorgehen, das heißt, wir entfernen im i-ten Konstruktionsschritt 2^{i-1} Tremata der Länge r^{-i}. Eine technische Definition einer solchen Menge wird leider etwas schwerfällig, sie könnte etwa so aussehen:

Randpunkte des ersten Intervalls = Einheitsintervall = Ω

$$a_{0,0} = 0$$

$$b_{0,0} = 1$$

Aufteilung des j-ten Intervalls der i-ten Generation in zwei Intervalle der i+1-ten Generation:

$$a_{i+1,2j} = a_{i,j}$$

$$b_{i+1,2j} = \frac{b_{i,j} - a_{i,j}}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{r^{i+1}}$$

$$a_{i+1,2j+1} = \frac{b_{i,j} - a_{i,j}}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{r^{i+1}}$$

$$b_{i+1,2j} = b_{i,j}$$

Definition der Intervalle, aus den noch Tremata entfernt werden können:

$$K_{i,j} = [a_{i,j}, b_{i,j}[$$

Tremata der i-ten Generation als Komplement der Intervalle, aus denen Tremata entfernt werden können:

$$K_i = \overline{\bigcup_{j=0}^{2^{i-1}} K_{i,j}}$$

Cantorstaubkomplement als Vereinigung aller Tremata:

$$K(r) = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$$

Welche Länge hat nun K(r)? In jeder Generation kommen 2^{i-1} Tremata der Länge r^{-i} hinzu, die Gesamtlänge von K(r) ergibt also

$$\lambda^1(K(r)) = \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2}{r}\right)^i = \frac{1}{r-2}$$

Für den Spezialfall r = 3 ergibt sich also gerade $\lambda^1(K(3)) = 1$, für r = 4 ergibt sich $\lambda^1(K(4)) = \frac{1}{2}$, und durch geeignete Wahl eines reelen r zwischen 3 und ∞ läßt sich für $\lambda^1(K(r))$ jede beliebige Länge zwischen 0 und 1 realisieren.

Das K(r) ist freilich noch weit entfernt, das gesuchte A zu sein. Es erfüllt eine Hälfte der Forderung: in jedem beliebigen Teilintervall von Ω ist es von nicht verschwindender Länge. Gleiches muß aber auch vom Komplement von A gelten. Um dies zu erreichen, müssen wir noch etwas mehr Aufwand betreiben.
Wir können die Forderung erreichen, indem wir aus K(r) kleinere Cantorstaubkomplemente herausschneiden. K(r) besteht ja aus der Vereinigung von abzählbar vielen halboffenen Intervallen. Aus jedem dieser abzählbar vielen halboffenen Intervalle entfernen wir ein Cantorstaubkomplement zweiter Ordnung. Um ein solches Cantorstaubkomplement zweiter Ordnung zu konstruieren, müssen wir einfach $a_{0,0}$ und $b_{0,0}$ des Cantorstaubkomplements zweiter Ordnung mit den Intervallenden eines Intervalls von K(r) statt mit den Intervallenden des Einheitsintervalls identifizieren. Technisch bedeutet dies, wenn wir einige weitere Indizes mit uns herumschleppen, etwa folgendes:

Die Randpunkte des ersten Intervalls sind nun variabel:

$$a_{0,0} = a$$

$$b_{0,0} = b$$

Der Rest folgt der Definition von K(r): Aufteilung des j-ten Intervalls der i-ten Generation in zwei Intervalle der i+1-ten Generation:

$$a_{i+1,2j} = a_{i,j}$$
$$b_{i+1,2j} = \frac{b_{i,j} - a_{i,j}}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{r^{i+1}}$$
$$a_{i+1,2j+1} = \frac{b_{i,j} - a_{i,j}}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{r^{i+1}}$$
$$b_{i+1,2j} = b_{i,j}$$

Definition der Intervalle, aus den noch Tremata entfernt werden können:

$$K_{i,j} = [a_{i,j}, b_{i,j}[$$

Tremata der i-ten Generation als (nun: relatives) Komplement der Intervalle, aus denen Tremata entfernt werden können:

$$K_i = [a,b[\setminus \bigcup_{j=0}^{2^{i-1}} K_{i,j}$$

Cantorstaubkomplement als Vereinigung aller Tremata:

$$K(r,a,b) = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i$$

Wir haben nun ein erstes Cantorstaubkomplement:

$$K_1 = K(r_1, 0, 1)$$

und eine unendliche Vereinigung von Cantorstaubkomplementen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned} K_2 = \; & K(r_2, b_{1,0}^{r_1,0,1}, a_{1,1}^{r_1,0,1}) \\ & \cup K(r_2, b_{2,0}^{r_1,0,1}, a_{2,1}^{r_1,0,1}) \cup K(r_2, b_{2,1}^{r_1,0,1}, a_{2,2}^{r_1,0,1}) \\ & \cup \ldots \end{aligned}$$

Die Menge $D_1 = K_1 \setminus K_2$ erfüllt nun die Forderung, daß ihr Komplement in keinem Teilintervall von verschwindender Länge ist. Sie selbst ist allerdings in einigen Teilintervallen durchaus von verschwindender Länge. Um die zweite Hälfte der Forderung zu erfüllen, haben wir also die erste Hälfte der Forderung fallen gelassen.

Wir müssen daher eine weitere Menge K_3 einführen, die aus Cantorstaubkomplementen innerhalb von jedem Teilintervall von K_2 besteht. Und so weiter.

Allgemein ist K_{i+1} eine Menge, die aus Cantorstaubkomplementen $K(r_{i+1}, a, b)$ für jedes Teilintervall $[a, b[$ der Menge K_i besteht. Dabei ist zu beachten, daß jedes K_i aus abzählbar vielen Intervallen besteht, also eine Borelmenge ist. Jede dieser Mengen K_i ist folglich meßbar und hat die Länge

$$\lambda^1(K_i) = \prod_{j=1}^{i} \frac{1}{r_j - 2}$$

Es sei nun allgemein $D_i = K_i \backslash K_{i+1}$. Wir können nun unsere Menge A konstruieren, indem wir alle ungeraden D_i vereinigen, also

$$A = \bigcup_{i=0}^{\infty} D_{2i+1}$$

Auch A ist damit eine Borelmenge und meßbar. Durch geeignete Wahl der r_i können wir sogar die Gesamtlänge von A beliebig (zwischen 0 und 1) festsetzen (soll A die Länge a haben, können wir die r_i beispielsweise so festsetzen, daß D_{2i+1} gerade die Länge $\frac{a}{2^i}$ besitzt). Sowohl A als auch $\overline{A}$ sind überall dicht in Ω und besitzen darüber hinaus in jedem echten Teilintervall [c, d[eine nicht verschwindende Länge.

Wenn wir statt A und seinem Komplement allgemeiner n verschiedene Mengen A_i für $i \leq n$ betrachten, wobei die A_i eine Zerlegung von Ω in disjunkte Teilmengen darstellen sollen und jedes A_i die Länge a_i besitzen soll, so ist auch dies möglich, indem wir jedes A_i zusammensetzen aus

$$A_i = \bigcup_{j=0}^{\infty} D_{jn+i}$$

Dabei ist allerdings zu beachten, daß ein A_i auch die Menge $[0, 1[\backslash K_1$ erhält, die nicht zu vernachlässigen ist, und daß es außerdem Punkte gibt, die weder in $[0, 1[\backslash K_1$ noch in einem der D_j liegen, beispielsweise der Punkt $\frac{1}{2}$, die ebenfalls noch einem A_i zugeschlagen werden müssen, die allerdings eine Nullmenge bilden. Am einfachsten geschieht dies, wenn wir A_n entsprechend festlegen als

$$A_n = \Omega \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$$

Auch hier wieder können die r_i geeignet so gewählt werden, daß sich beliebige Längen a_i realisieren lassen.

2.4 *Weitere Modelle mit positiver Länge*

Wir haben ursprünglich eine homogene und eine inhomogene Interpretation betrachtet. Das Modell des letzten Abschnittes ist ein inhomogenes Modell, allerdings nicht von maximaler Inhomogenität, das heißt, es wäre erst noch zu überlegen, welchen Grad der Inhomogenität wir mit diesem Modell erreichen könnten. Wir könnten deshalb unsere ursprüngliche Forderung an die Menge A noch etwas präziser fassen, indem wir wahlweise verlangen, daß A in jedem beliebigen Intervall die gleiche Dichte besitzt, oder aber, daß wir zu jeder vorgegebenen Dichte ein Intervall finden können, in dem A gerade diese Dichte besitzt. Wir suchen also zwei Mengen H und I aus Ω mit:

$$\forall c, d \in \mathbb{R}, 0 \leq c < d \leq 1: \lambda^1([c, d[\cap H) = h(d - c)$$

wobei $0 < h < 1$ die Länge der („homogenen") Menge H ist, und

$$\forall \varrho \in \,]0, 1[: \exists c, d \in \mathbb{R}, 0 \leq c < d \leq 1: \lambda^1([c, d[\cap I) = \varrho(d - c)$$

H ist mithin eine Menge, die auf Ω ganz und gar gleichmäßig verteilt ist, so daß sich keine Stelle finden läßt, an der H besonders konzentriert wäre. I dagegen ist so ungleichmäßig verteilt, daß sich Stellen in Ω finden lassen, an denen I sich mit beliebiger Dichte zusammenballt. Es stellt sich nun die Frage, ob solche Mengen existieren, und wenn ja, ob sich konstruktive Beispiele angeben lassen.

Beginnen wir mit der Menge I. Eine solche Menge zu konstruieren ist schwierig, das liegt aber vor allem daran, daß wir es uns mit unserer Forderung, die Dichte ϱ exakt zu treffen, unnötig schwer gemacht haben. Was wir ja eigentlich wirklich wollen, ist, eine beliebige Dichte ϱ mit beliebiger Genauigkeit treffen zu können. Wir sollten daher unsere Forderung lockern zu

$$\forall \varrho \in \,]0, 1[: \forall \varepsilon > 0: \exists c, d \in \mathbb{R}, 0 \leq c < d < 1: |\lambda^1([c, d[\cap I) - \varrho(d - c)| < \varepsilon$$

Eine solche Menge zu konstruieren ist nun im Prinzip, nach den Vorbereitungen des vorangegangenen Abschnittes, nicht weiter schwierig. Die genaue technische Durchführung eines konstruktiven Beweises ist allerdings so umständlich, daß wir an dieser Stelle darauf verzichten wollen und nur die ungefähre Idee skizzieren:

Wir gehen zunächst analog vor wie bei der Konstruktion der Menge A im vorangegangenen Abschnitt. Wenn wir allerdings die Menge $K(r_i, a, b)$ innerhalb eines Intervalls [a, b[konstruieren, verwenden wir innerhalb einer Generation i nicht immer das gleiche r_i, sondern für die verschiedenen Intervalle des „Eltern"-Cantorstaubkomplements verwenden wir verschiedene Werte, die teils größer, teils kleiner als r_i sind, so daß insgesamt die Gesamtheit aller Cantorstaubkomplemente aller Intervalle die richtige Gesamtlänge besitzen, die einzelnen Cantorstaubkomplemente aber mal länger, mal kürzer ausfallen.

Interessanter ist die Frage nach der Existenz einer Menge H. Um uns das Leben etwas einfacher zu machen, interessieren wir uns für ein H der Länge $h = \frac{1}{2}$ (die folgenden Ausführungen lassen sich aber leicht für beliebiges h verallgemeinern). Nach Voraussetzung gilt für ein beliebiges halboffenes Intervall [c, d[aus Ω:

$$\lambda^1([c, d[\cap H) = \frac{1}{2}\lambda^1([c, d[)$$

Wir interessieren uns nun die Menge $\mathcal{A}$ aller Mengen A, für die gilt:

$$\lambda^1(A \cap H) = \frac{1}{2}\lambda^1(A)$$

Zu diesen Mengen zählen auf jeden Fall, nach Voraussetzung, die halboffenen Intervalle. Dazu zählen aber auch die Komplemente dieser Mengen. Weiter zählen dazu auch endliche Vereinigungen solcher Mengen. Es gilt aber auch: sei J eine abzählbare Indexmenge, seien verschiedene Mengen A_j mit $j \in J$ paarweise disjunkt, und für alle $j \in J$ sei $A_j \in \mathcal{A}$. Dann ist auch $\bigcup_{j \in J} A_j \in \mathcal{A}$.

Denn es gilt:

$$\begin{aligned}\lambda^1((\bigcup_{j\in J} A_j)\cap H) &= \lambda^1(\bigcup_{j\in J}(A_j \cap H)) \\ &= \sum_{j\in J}\lambda^1(A_j\cap H) \\ &= \sum_{j\in J}\frac{1}{2}\lambda^1(A_j) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{j\in J}\lambda^1(A_j) \\ &= \frac{1}{2}\lambda^1(\bigcup_{j\in J}A_j)\end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{A}$ aber auch abgeschlossen gegen beliebige abzählbare Vereinigungen. Daraus folgt aber, daß $\mathcal{A}$ alle Borelschen Mengen aus Ω enthält (da $\mathcal{A}$ die σ-Algebra der halboffenen Intervalle enthält). Nun ist aber nach Voraussetzung insbesondere H eine Borelsche Menge, und damit natürlich auch $\overline{H}$. Damit sind aber auch H und $\overline{H}$ Elemente von $\mathcal{A}$. Es gilt also

$$\lambda^1(\overline{H}\cap H) = \frac{1}{2}\lambda^1(\overline{H}) = \frac{1}{2}\lambda^1(H) = \frac{1}{4}$$

Andererseits ist natürlich

$$\lambda^1(\overline{H}\cap H) = \lambda^1(\emptyset) = 0$$

Aus der Annahme der Existenz einer solcher Menge H folgt mithin ein Widerspruch. Eine solche Menge kann es demnach nicht geben. Für eine homogene Interpretation des Anaxagoras ist das Lebesgue-Borelsche Maß also nicht geeignet.

2.5 *Bemerkungen zum Fundierungsaxiom*

In der Axiomatisierung der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre gibt es folgendes sogenanntes „Fundierungsaxiom“:

$$\forall x\,(\exists y\; y\in x \rightarrow \exists y\,(y\in x \wedge \forall z\,(z\in y \rightarrow \neg z\in x)))$$

oder, weniger technisch ausgedrückt:

$$a \neq \emptyset \rightarrow \exists x\in a\colon \forall y\in a\colon y\notin x$$

Eine der Folgerungen aus diesem Fundierungsaxiom ist, daß es keine Menge a mit $a \in a$ gibt. Es gibt auch kein Paar a und b mit $a \in b$ und $b \in a$, und generell keinen Zyklus mit $a_1 \in a_2 \in \dots \in a_n \in a_1$. Wenn wir einen „Stoff“ bei Anaxagoras als „Menge“ im Zermelo-Fraenkelschen Sinn auffassen, dann verhindert das Fundierungsaxiom, daß jeder Stoff jeden anderen Stoff enthalten kann.

Es ist nun allerdings die Zermelo-Fraenkelsche Axiomatik nicht sakrosankt und kann durch eine andere Axiomatik ersetzt werden. Insbesondere für das Fundierungsaxiom gilt, daß es (im Gegensatz etwa zum berühmten Auswahlaxiom) so gut wie nie benötigt wird. Es ist auch ohne Fundierungsaxiom möglich, Ordinalzahlen zu definieren und mit Hilfe der Ordinalzahlen die von Neumannschen Stufen V_α einzuführen. Wenn On die Klasse aller Ordinalzahlen bezeichnet, so läßt sich auch die Klasse

$$R = \bigcup_{\alpha \in On} V_\alpha$$

definieren. Es läßt sich lediglich nicht beweisen, daß die Klasse R gleich der Klasse V aller Mengen ist. Fast alle Sätze aber, die sich unter Verwendung des Fundierungsaxioms beweisen lassen, lassen sich ohne Fundierungsaxiom zumindest für die Mengen aus R beweisen, das heißt, R stellt die Klasse der gewöhnlichen Mengen dar, für die das Fundierungsaxiom gilt, und das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem gilt zumindest für R. Die Verwendung des Fundierungsaxioms beruht, pointiert gesagt, lediglich auf der Faulheit von Zermelo, Fraenkel und ihren Nachfolgern, nicht alle mathematischen Formeln mit zusätzlichen „$\in$ R“ würzen müssen zu wollen.

Wenn wir das Fundierungsaxiom aufgeben, können wir die Physik des Anaxagoras (gemäß der Interpretation 2) so formulieren:

Wir haben die Menge a aller materiellen Stoffe $a_1, ..., a_n$, die wir ebenfalls als Mengen auffassen, sowie die Menge g. Es gilt nun:

1. $x \in a \wedge y \in a \wedge x \neq y \rightarrow x \in y$
2. $x \in a \rightarrow x \notin x$
3. $x \in a \rightarrow g \in x$
4. $x \in a \rightarrow x \notin g$

In Worten:

1. Jeder Stoff ist in jedem anderen Stoff enthalten
2. Kein Stoff enthält sich (unmittelbar) selbst
3. Der Geist ist in jedem Stoff enthalten
4. Kein Stoff ist im Geist enthalten

Ein solches Modell hat jedoch einige gravierende Nachteile. Zunächst einmal enthält dieses Modell noch keinerlei quantitative Aspekte, die erst umständlich nachträglich eingebaut werden müßten. Zum anderen lassen sich ähnliche, aber axiomatisch harmlose Modelle innerhalb der orthodoxen Mengenlehre darstellen. Es ist auch schwierig zu sehen, welchen Erkenntnisgewinn uns der Übergang zu einer Mengenlehre verschaffen sollte, in der das Fundierungsaxiom beweisbar falsch ist (wenn wir a als nicht leer voraussetzen).

Statt direkt die Enthaltenseinsrelation neu zu interpretieren, könnten wir etwa auch eine $n+1 \times n+1$-Matrix einer „quasi-Enthaltenseinsrelation“ komplett mit Quantifizierung betrachten. Sei E diese Matrix, $e_{i,j}$ ein Eintrag dieser Matrix. Das n+1te Element soll dabei die Menge g, den Geist, darstellen. $e_{i,j}$ gibt an, mit welchem Anteil der Stoff a_i im Stoff a_j enthalten ist. Es soll nun gelten

1. $i \leq n, j \leq n, i \neq j: e_{i,j} > 0$
2. $i \leq n+1: e_{i,i} = 0$
3. $j \leq n: e_{n+1,j} > 0$
4. $i \leq n: e_{i,n+1} = 0$

Und außerdem soll zusätzlich gelten:

5. $j \leq n$: $\sum_{i=1}^{n+1} e_{i,j} = 1$

Auf diese Art und Weise können wir die Logik der Beziehung der verschiedenen Stoffe in quantifizierter Form darstellen, ohne direkt in die Axiome der Mengenlehre eingreifen zu müssen. Besonders spannend ist natürlich auch diese Matrix nicht, solange wir sie nicht für irgend einen Zweck verwenden können. Jedenfalls aber können wir zeigen, daß es möglich ist, von Stoffen des Anaxagoras zu sprechen, ohne uns auf Atome beziehen zu müssen.

2.6 Zusammenfassung

Es ist möglich, die verschiedenen Deutungen der Physik des Anaxagoras in mathematische Modelle zu fassen, allerdings ist diesen Modellen gemeinsam, daß sie, um die Verwickeltheit der Konzeption des Anaxagoras adäquat repräsentieren zu können, allesamt relativ moderne Konzeptionen verwenden müssen, nämlich mathematische Begriffe (Topologie, Maßtheorie, Mengenlehre), die nicht vor dem zwanzigsten Jahrhundert vollständig entwickelt wurden. Ein einfacher und eleganter Zugang zur Physik des Anaxagoras besteht in der Verwendung von speziellen Maßen, die sich mit Hilfe von Besicovitch-Mengen definieren lassen. Es handelt sich hierbei nicht um das einzig mögliche Modell, andere Modelle, die eine Variante des Cantorstaubes verwenden, bieten gewisse Vorteile, sind aber komplizierter und weniger universell. Diese Modelle setzen das Vorhandensein von „Atomen“, nämlich der einzelnen Punkte des Einheitsintervalls, voraus. Es ist möglich, auch auf diese Voraussetzung zu verzichten, auf direktem Weg, indem wir grundlegend in die axiomatische Fundierung der Mathematik eingreifen, ein solch radikaler Eingriff ist aber weder nötig noch empfehlenswert, da sich ein atomloses Modell auch mit weniger radikalen Methoden beschreiben läßt.

3 Anaxagoras

3.1 Leben und Werk

Anaxagoras wurde kurz nach 500 v. Chr. in Klazomenai (in Ionien) geboren. Um 456/455 soll er in Athen zu lehren begonnen haben. Er war ein Freund und Berater des Perikles, und als solcher wurde er das Opfer des ersten gegen einen Philosophen angestrengten Prozesses. Ein Seher namens Diopeithes hatte 438/437 ein Gesetz durchgesetzt, nach dem das Leugnen göttlicher Dinge beziehungsweise das Erteilen von Astronomieunterricht (was damals mehr oder weniger als Eins galt) unter Strafe gestellt war, und kurz danach wurde Anaxagoras von Kleon auf der Grundlage dieses Gesetzes angeklagt, von Perikles verteidigt und zu einer Buße von 5 Talenten und zur Verbannung verurteilt. Er zog sich nach Lampsakos (Ionien) zurück, wo er etwa ein Jahrzehnt später, um 428/427 hochgeehrt starb. Er hatte bestimmen lassen, die Kinder sollten jährlich an seinem Todestag schulfrei bekommen, und durch diese geschickte Maßgabe blieb er lange im Gedächtnis der Lampsakoser lebendig. Auf seinem Grabstein ehrten sie ihn mit den Worten „Hier, der am meisten die Grenze der Wahrheit erreichte himmlisch geordneter Welt, lieget Anaxagoras.“ [13][1]

Als Anaxagoras zu wirken begann, gab es bereits eine beachtliche philosophische Tradition. Gewöhnlich wird Anaxagoras als ein Nachfolger von Anaximander und Anaximenes angesehen, der von Ideen des Parmenides beeinflußt war, möglicherweise auch von Zenon von Elea. Gleichzeitig stellt Anaxagoras in gewisser Weise auch einen Neuanfang dar: er ist der erste Philosoph, der sein Wirken nach Athen verlegt und damit überhaupt erst die Philosophie in Athen begründet, er gründet keinen Geheimbund, sondern erteilt öffentlich Unterricht, und infolge dessen ist er der erste seiner Gesinnung wegen verfolgte Philosoph.

Seine Konzeption der Stoffe ist, selbst wenn versucht wurde, sie auf Parmenides zurückzuführen, außerordentlich originell und ohne Vorläufer, und zugleich auch ohne Nachfolger (und außerdem, wie bereits gesagt, nach allem, was wir wissen, vollkommen falsch). Seine Astronomie und seine übrige Physik ist natürlich für modernes Empfinden teilweise willkürlich bis abstrus, teilweise enthält sie staunenswerte Einsichten. Die Sonne etwa ist für Anaxagoras ein glühender Felsen, der größer als der Peloppones ist, die Wärme der Sterne sei auf der Erde aufgrund der großen Entfernung nicht zu spüren, der Mond habe kein eigenes Licht, sondern reflektiere nur das Licht der Sonne, Sonnen- und Mondfinsternisse entstünden durch den Schatten des Mondes beziehungsweise der Erde, der Mond sei der Erde ähnlich und habe Täler und Schluchten, die Winde entstünden, weil sich die Luft durch die Sonne erwärme und aufsteige, der Regenbogen sei eine Reflexion der Sonne auf einer Wolke, weshalb ein Regenbogen immer in der der Sonne entgegengesetzten Richtung zu sehen sei, der Embryo erhalte Nahrung durch die Nabelschnur, Fische benutzten ihre Kiemen, um Luft zu gewinnen, und alle Lebewesen, auch die Muscheln, atmeten, und anderes mehr, dem auch wir Heutigen unsere Zustimmung kaum versagen können. Andererseits war er der Meinung, Rabe und Ibis vollzögen den Koitus mit dem Schnabel, eine Ansicht, über die Aristoteles sich lustig macht.

Die Welt des Anaxagoras ist materialistisch. Inwieweit er die Himmelserscheinungen materialistisch erklärt, haben wir bereits gesehen. Darüber hinaus ist auch die Himmelssphäre kein Ort der unwandelbaren Harmonie, wie die vom Himmel herabfallenden Trümmer beweisen (spätere Philosophen wie Aristoteles haben versucht, die Harmonie der Sphären wieder herzustellen, in-

[1] Zitate, die von einer Zahl in eckiger Klammer gefolgt werden, sind MANSFELD 1986 entnommen. Die Zahl in der eckigen Klammer gibt die Nummer des Anaxagoras-Fragments bei Mansfeld an.

dem sie die Veränderlichkeit auf die sublunare Sphäre beschränkten, ein Versuch, der spätestens mit der Entdeckung veränderlicher Sterne wie dem Algol widerlegt war). Darüber hinaus gibt es ein Fragment, in dem Anaxagoras sagt „die Trennung sei der Tod auch der Seele“ [73]. Es scheint so, als habe Anaxagoras für diese Ansicht auch ein Argument besessen, das wohl damit zu tun hat, daß Anaxagoras den Schlaf als körperliches statt seelisches Phänomen erklärt, die Einzelheiten sind aber leider verloren gegangen.

In seine Physik hat Anaxagoras auch ein Prinzip aufgenommen, das er als „Geist“ („νοῦς“) bezeichnet. Dieses Prinzip, dieser Stoff wird von ihm benötigt, um Veränderungen und Bewegungen erklären zu können. Der Geist ist dabei aber als Terminus technicus aufzufassen, der in seiner Bedeutung keineswegs mit der alltäglichen Bedeutung dieses Wortes übereinstimmt. Platon läßt Sokrates im Phaidon seine Enttäuschung äußern, daß Anaxagoras zuerst so richtig beginne, daß er den Geist als Grund von allem angibt, „ich wurde aber, lieber Freund, schrecklich enttäuscht. Denn als ich selbst im Buch weiterlas, sah ich, daß der Verfasser von seinem „Geist“ überhaupt keinen Gebrauch machte und auch keine Zweckursachen bezüglich der Ordnung der Dinge im Kosmos heranzog, sondern Lüfte und Äthermassen und Gewässer bemühte, und anderes Unpassendes mehr.“ [8] Aber dieses Mißverständnis kommt nur dadurch zustande, daß Platon (der ebenfalls ein sehr origineller Denker, aber nicht immer ein sehr sorgfältiger Leser und manchmal nicht einmal ein sorgfältiger Denker ist) an dieser Stelle das Wort „Geist“ völlig mißversteht und ihm eine anspruchsvolle Bedeutung unterstellt, die Anaxagoras gar nicht im Sinn hatte. Im übrigen hat zu dieser Kritik bereits Simplikos alles Nötige gesagt: „Und was Sokrates im Phaidon Anaxagoras vorwirft, daß er bei den einzelnen Kausalerklärungen vom Geist keinen Gebrauch macht, sondern nur materialistische Begründungen gibt, das ist etwas, das in der physikalischen Wissenschaft nun einmal am Platz ist. Sogar Platon selbst führt im Timaios die bewirkende Ursache aller Dinge bloß in einem generellen Sinne ein, im einzelnen macht er aber die Verschiedenheiten der Massen und Formen zur Ursache für Wärme und Kälte und verfährt in anderen Fällen in genau derselben Weise.“ [86]

Nachdem sich Anaxagoras hiermit vorgestellt hat, können wir mit der Untersuchung einiger speziellerer Fragen beginnen.

3.2 Der Anfang der Welt

Am Anfang der Welt war alles vollkommen durchmischt. Hierzu besitzen wir glücklicherweise ein ausführliches Zitat von Anaxagoras selbst:

> Gleichmäßig-zusammen waren die Sachen alle, unendlich sowohl der Zahl als auch der Kleinheit nach. Denn auch das Kleine war ohne Ende, und während sie alle gleichmäßig-zusammen waren, war darin infolge dieser Kleinheit nichts klar erkennbar. Denn Luft-wie-auch-Äther, beide unendlich seiend, verdeckten alles. Denn in der Gesamtheit aller Sachen sind diese als die größten drin, sowohl zahlenmäßig als auch der Ausdehnung nach. [21]

Der Anfangszustand war demnach eine vollkommen homogene Mischung, in der die Bestandteile Luft oder Äther dominierten. In dieser Mischung sind zwar alle Stoffe potentiell vorhanden, faktisch aber nicht, denn in Wirklichkeit war ja nur Luft oder Äther da. Dementsprechend ergänzt Aristoteles zu Recht: „Statt „alles gleichmäßig zusammen“ [...] hieße es besser „es war alles gleichmäßig zusammen der Möglichkeit nach, der Wirklichkeit aber nicht.““ [20]

An dieser Stelle nun braucht Anaxagoras den Geist, denn er muß ja motivieren, warum nicht auf Ewigkeit alles in dieser perfekten homogenen Durchmischung blieb. Der Geist bewirkt eine Trennung, es entsteht ein Weltwirbel, in dem die Stoffe entmischt werden und sich sondern (dabei aber natürlich nie völlig rein werden). Infolgedessen entstehen Zonen, in denen Luft und Äther nicht länger dominieren.

Dieser Vorgang geschieht nicht nur ein einziges Mal, für eine einzige Welt. Statt dessen gibt es viele Welten, und in jeder Welt gibt es eine Sonne und einen Mond und Menschen.

Es stellt sich die übliche Kantsche Frage: wenn das Universum eine unendliche Zeit in Ruhe war und dann der Geist den Wirbel in Gang gesetzt hat, der zur Differenzierung geführt hat, warum ist dann diese erste Bewegung gerade zu dem Zeitpunkt in Gang gekommen, zu dem sie in Gang kam, und nicht schon eine Woche früher?

Aristoteles berichtet:

> Anaxagoras sagt, während die unendliche Zeit hindurch alles gleichmäßig-zusammen und in Ruhe begriffen war, habe es der Geist mit einem Mal in Bewegung gesetzt und auseinandertreten lassen. [34]

Wir können unterstellen, verschiedene Weltwirbel starteten zu verschiedenen Zeiten, so daß im gesamten Universum schon immer irgendwo etwas passiert sei. Aber wenn wir Aristoteles als Quelle ernst nehmen, dann ist uns diese Deutung verwehrt. Außerdem wäre durch eine solche Deutung das Problem nicht wirklich gelöst: wenn die einzelnen Weltwirbel kausal unabhängig voneinander sind, woher soll ein einzelner Weltwirbel dann wissen, daß es jetzt für ihn Zeit ist, loszuwirbeln und die ursprüngliche vollkommene Homogenität abzuschütteln?

Es steht uns natürlich frei, zu unterstellen, Anaxagoras habe dieses Problem ignoriert, es sei ihm vielleicht sogar gar nicht klar gewesen, daß hier ein Problem vorliegt.

Ich glaube allerdings, daß, mit etwas interpretatorischer Freiheit, eine raffiniertere Deutung möglich ist.

Eine Standardausrede unserer Tage in vergleichbarer Situation besteht darin, die Zeit erst mit dem bewegten Universum beginnen zu lassen und zu sagen, daß es vor dem bewegten Universum noch keine Zeit gab und daß daher auch die Frage sinnlos ist, warum das Universum nicht schon eine Woche früher begann. Im Prinzip wäre auch Anaxagoras diese Theorie zugänglich gewesen: Aristoteles referiert (ohne daß der Name des Anaxagoras fällt, er denkt wohl eher (fälschlich) an Platon) die These, die Zeit sei mit der Bewegung der Himmelskörper zu identifizieren. Eine solche These war mithin der Antike bekannt, und Anaxagoras hätte behaupten können, ehe der Geist die Bewegung in die Welt brachte, habe es noch keine Bewegung gegeben, und ohne Bewegung auch noch keine Zeit, und da es vor der ersten Bewegung keine Zeit gab, sei auch die Frage sinnlos, warum die erste Bewegung nicht eine Woche früher eingesetzt habe.

Anaxagoras hatte aber noch weit eher Grund, die ursprüngliche Homogenität mit dem Nichts zu identifizieren.

Anaxagoras teilt, wenn wir Aristoteles folgen, die Ansicht, „nach der aus Nichtseiendem auch Nichts entstehe" [18]. Wenn etwas existiert, dann, weil es aus etwas Seiendem entstanden ist. Warum aber ist überhaupt etwas?

Die Stoffe, von denen Anaxagoras spricht, sind gegensätzliche Stoffe. Dies führt Aristoteles auf folgende Idee:

> Denn es ist klar, daß zu der Zeit, als sich noch nichts ausgesondert hatte, jede Aussage, die von der damaligen Substanz etwas präjudizierte, falsch sein mußte, z.B. Aussagen wie: sie sei etwas, das weiß ist oder schwarz oder grau oder wie auch immer gefärbt. Im Gegenteil: sie war notwendig etwas Farbloses, sonst hätte sie eine von jenen Farben haben müssen. In genau derselben Weise und aus demselben Grunde war sie auch etwas jeder Geschmacksqualität Bares, und es fehlte ihr, was es von dieser Art sonst noch gibt. War es doch unmöglich, daß sie etwas war, das in qualitativer oder quantitaiver Hinsicht oder der Form nach determiniert war. [31]

Damit, als etwas aller Qualitäten bares, kommt die ursprüngliche homogene Mischung dem Nichts recht nahe. Zwar haben wir oben gesehen, daß Anaxagoras behauptet, in der ursprünglichen Mischung habe Luft/Äther dominiert, so daß die ursprüngliche Mischung doch nicht frei von Qualitäten scheint. Andererseits scheint Anaxagoras Luft/Äther für kaum entfernt vom Nichts zu halten, denn er sagt, „daß die Fische, wenn sie das Wasser durch die Kiemen ausstoßen, atmen, indem sie die Luft, die infolgedessen in ihrem Maul entsteht, einsaugen. Denn es gebe überhaupt kein Leeres.“ [71] Und weiter heißt es bei Anaxagoras:

> Aber bevor diese Sachen ausgesondert worden waren, war, weil alles gleichmäßigzusammen war, auch nicht nur eine einzige Farbe klar erkennbar. Dies verhinderte ja ständig die Zusammenmischung aller Sachen, des Feuchten und des Trocknen und des Warmen und des Kalten und des Hellen und des Dunklen, und es war vielerlei Erde drin sowie auch zahlenmäßig unendliche Samen, welche einander in keinerlei Hinsicht ähnlich waren. Auch von den anderen ist ja das eine dem anderen in keinerlei Hinsicht ähnlich. [24]

Damit kann Anaxagoras erklären, wie aus Nichts etwas Seiendes entstehen kann. Denn sein ursprünglicher Zustand ist ein Nichts, daß potentiell alles enthält, weil es eine gleichmäßige Mischung aller Gegensätze und aller einander gegenseitig in ihrer Vielheit aufhebender Dinge ist. Durch die Entmischung entsteht die Welt. Vor der Entmischung ist ein Zustand, der kein völliges Nichts ist, der aber andererseits keinerlei Qualitäten besitzt und von dem sich keine Eigenschaften aussagen lassen. Es ist nicht so, daß die homogene Welt als wahrhaft Seiendes mit beschreibbaren Qualitäten unendlich lange untätig ruht, um plötzlich in Aktivität zu verfallen, sondern eine schattenhafte Welt unfaßbarer Homogenität geht unserer wahrhaft seienden Welt voraus, und es wäre nicht weiter erstaunlich, wenn zeitliche Begriffe auf dieses ursprüngliche Quasi-Nichts nicht anwendbar wären.

Wir können noch weiter gehen: Anaxagoras verwendet als Stoffe nicht nur das, was landläufig in diesem Sinn verstanden wird, wie etwa Fleisch oder Haar, sondern Stoffe, die wir als Eigenschaften bezeichnen würden und die gewöhnlich als Gegensatzpaare auftreten, wie das Helle und das Dunkle, das Feuchte und das Trockene. Es liegt nahe, die Existenz zweier weiterer Stoffe anzunehmen, nämlich dem Früheren und dem Späteren. In der ursprünglichen Mischung sind das Frühere und das Spätere gleichmäßig vermischt, so daß noch kein Früher und Später erkennbar ist. Erst die Trennung durch den Geist bewirkt, daß manches Früher ist (das, was einen größeren Anteil am Früher in seiner Mischung enthält) und manches Später.

Es gibt allerdings keinen Hinweis, daß Anaxagoras diese Theorie, die ihm aus seinen Schwierigkeiten hätte helfen können, selbst entwickelt hätte. Anaxagoras denkt sich wohl die Trennung der verschiedenen Stoffe durch einen Wirbel, so kann aber die Trennung des Früher und des Später kaum vor sich gehen, denn ein Wirbel ist ja schon eine physikalische Bewegung innerhalb der Zeit.

3.3 Die Zahl der Stoffe

Wie viele verschiedene Stoffe gibt es nach Anaxagoras? Aristoteles kennt Stoffe, die er Homoiomerien nennt, das sind Stoffe, die, modern gesprochen, skaleninvariant und in ihren Eigenschaften ununterscheidbar von ihren Teilen sind. Ein Mensch ist nicht homoiomerisch, da er nicht aus kleinen Menschen besteht, wohl aber das Wasser, wenn wir mit Aristoteles für einen Moment vergessen, daß das Wasser aus Atomen besteht, dann besteht nämlich das Wasser aus Teilen, die ebenfalls Wasser sind. Es scheint, als ob Anaxagoras die Stoffe, die Aristoteles für homoiomerisch hält, als Stoffe akzeptiert hätte, wir wissen jedoch noch nicht, ob Anaxagoras diese Stoffe als homoiomerisch aufgefaßt hat. Homoiomerisch kann für Anaxagoras ein Stoff nur sein, wenn er aus einer homogenen Mischung besteht. Der Urzustand des Universums war in diesem Sinn homoiomerisch, dann aber kam es durch den Geist zu einer Verletzung der ursprünglichen vollkommenen Harmonie. Ob es nun homoiomerische Stoffe gibt, hängt davon ab, ob es homogene Dinge gibt, also davon, ob die Zerstörung der Homogenität sich auf allen Größenstufen vollzogen hat oder nicht: eben davon, ob die Interpretation 1a oder 1b richtig ist. Mit Hilfe der erhaltenen Fragmente läßt diese Frage sich leider nicht beantworten. Das einzige Fragment, das sich eventuell heranziehen ließe, wäre das folgende:

> Anaxagoras sagt, daß die Luft die Samen von allen Pflanzen enthält und daß diese, indem sie zusammen mit dem Wasser herunterkommen, die Pflanzen hervorbringen. [62]

Das Wort „Samen“ ist offensichtlich wiederum ein Terminus technicus, aber leider einer, von dem uns wieder die Definition unbekannt ist. Es kann dreierlei gemeint sein: mit „Samen“ sind so etwas wie Atome, kleinste, unteilbare Teile gemeint. Da Anaxagoras von fortgesetzter Teilbarkeit ausgeht und wohl keinen Begriff des infinitesimal kleinen Punktes besaß (den er aber andererseits doch gekannt haben könnte, wenn er Zenon kannte), sind die Samen wohl keine Atome. Wir werden auf diese Möglichkeit nochmals weiter unten ausführlich eingehen müssen. Oder „Samen“ ist ein Name für das, was ich „Stoff“ nenne, und Luft enthält in homogener Mischung den Pflanzensamen, also den Pflanzenstoff, und durch Bewegung der Luft gerät dieser Bestandteil der Luft in die Erde, wo dadurch Pflanzen entstehen. Ein solcher Gebrauch des Wortes „Same“ wäre außerordentlich extravagant, außerdem ist nicht sehr plausibel, daß die ganze Luft die Pflanzensamen gleichmäßig abgibt, so daß die Homogenität der Luft gewahrt bleibt. Oder aber, und diese Deutung scheint die angemessenste, mit Samen ist ein Gebilde innerhalb der Luft gemeint, in dem andere Stoffe als die Luft dominieren (genau das ist ja, in gewisser Weise, auch die alltägliche Bedeutung des Wortes). Dieser letzten Deutung zufolge aber kann die Luft keine homogene Mischung sein, da sie ja Bereiche enthält, in der andere Stoffe dominieren, und von diesen Bereichen ist anzunehmen, daß sie in der ganzen Luft dicht verteilt sind, und es ist dann wohl auch so, daß nicht nur die Luft nicht homogen ist, sondern auch alle anderen Stoffe nicht homogen sind.

Wenn wir diese Interpretation akzeptieren, dann gibt es für Anaxagoras seit der Urentmischung keine homogenen Bereiche der Welt mehr und damit, streng genommen, auch keine homoiomerischen Stoffe mehr: die ursprüngliche Mischung war der einzige homoiomerische Stoff, den es je gegeben hat. Wenn Aristoteles anmerkt, die Urmischung enthielte alle Stoffe nur potentiell, nicht aktual und phänomenologisch, dann trifft das nur auf die Urmischung zu. In allen späteren Zuständen des Universums enthält jeder Stoff jeden anderen Stoff nicht nur potentiell, sondern auch aktual, und wenn wir ein Ding aus einem Stoff hinreichend fein zerlegen, können wir in ihm jeden anderen Stoff finden.

Ich sagte, es scheint, als habe Anaxagoras die Stoffe, die Aristoteles für homoiomerisch hielt, als Stoffe akzeptiert, nach meiner Deutung hat er sie jedoch nicht als homoiomerisch akzeptiert.

Anaxagoras kannte den von Aristoteles eingeführten Begriff „homoiomerisch" nicht (nach allem, was wir wissen), hätte er ihn aber gekannt, dann hätte er Aristoteles insofern widersprechen müssen, insofern Aristoteles das, was den Sinnen homoiomerisch erscheint, für homoiomerisch dem Wesen nach hält, obwohl es das doch dem Wesen nach gar nicht ist.

Wenn wir dem Bericht des Aristoteles Glauben schenken würden (Aristoteles ist gewöhnlich ein etwas sorgfältigerer Leser als der oben getadelte Platon, neigt aber leider gelegentlich auch dazu, anstelle von Originalzitaten wilde Deutungsversuche zu liefern), dann hätte Anaxagoras aber nicht alle landläufigen, als homoiomerisch geltenden Stoffe als eigentliche Stoffe akzeptiert:

> Anaxagoras und Empedokles scheinen entgegengesetzter Meinung zu sein: Empedokles sagt nämlich, daß Feuer und Luft und Wasser und Erde die Elemente sind, vier an der Zahl und einfach, jedenfalls weit mehr als Fleisch und Knochen und was sonst aus Gleichteiligem gebildet ist. Anaxagoras jedoch betrachtet das aus Gleichteiligem Gebildete als einfach und Element, aber Erde und Feuer und Wasser und Luft als zusammengesetzt: denn diese seien ein Sammelsurium von jenen. [46]

Es liegt jedoch der Verdacht nahe, daß Aristoteles hier einem Mißverständnis unterliegt. Mißtrauisch stimmt schon die Rede von dem „aus Gleichteiligem gebildet", denn Erde &c. ist ja nach landläufiger Meinung auch aus Gleichteiligem gebildet, und Anaxagoras ist ja nicht wirklich der Ansicht, Fleisch sei aus Gleichteiligem gebildet. Vorstellbar ist, daß Anaxagoras sich in Bezug auf die traditionellen vier Elemente Erde, Feuer, Wasser und Luft, die gemeinhin als einfach galten, explizit dagegen ausgesprochen hat, sie als einfach zu betrachten. Das muß aber nicht bedeuten, diese vier Stoffe seien nach Anaxagoras als von anderen Stoffen wie etwa Fleisch oder Knochen wesentlich verschieden aufzufassen. Vielleicht hat Anaxagoras die Zusammengesetztheit und damit Nicht-Elementarität der traditionellen vier Elemente nur ausdrücklich betont, um sich von der Tradition abzusetzen, Fleisch und Knochen sind für ihn aber, wie nun hinreichend klar geworden sein sollte, ebenfalls ein Sammelsurium von allem. Anaxagoras spricht ja auch davon, die Luft habe in der Urmischung überwogen und dominiert, es scheint also Luft für ihn durchaus ein Stoff zu sein, der auf der selben Stufe steht wie Fleisch oder Knochen, und weder mehr noch weniger zusammengesetzt (um an die Diskussion aus 1.2 anzuknüpfen, bedeutet diese Deutung, daß es für Anaxagoras eine Bijektion zwischen Stoffen und Elementen gibt, so daß verständlich wird, warum Anaxagoras begrifflich nicht zwischen Stoffen und Elementen unterscheidet).

Wir haben in 3.2 bereits eine ganz andere Sorte von Stoffen kennen gelernt, solche Stoffe, die wir landläufig eher als Eigenschaften von Stoffen bezeichnen würden. Das Charakteristische dieser Stoffe ist, wie wir bereits feststellten, daß sie in Gegensatzpaaren auftreten: das Helle und das Dunkle, das Feuchte und das Trockene und so weiter. Hier macht sich Anaxagoras einer ziemlich lästigen und verbreiteten intellektuellen Sünde schuldig, nämlich Prädikate zu substantivieren, wie das dann Platon zur Meisterschaft getrieben hat.

Dadurch entstehen natürlich weitere Schwierigkeiten: Nehmen wir an, Milch ist ein Stoff, Weiß ist ein Stoff, und Schwarz ist ein Stoff. Es scheint nun, als trete der Stoff Milch immer nur in Verbindung mit dem Stoff Weiß auf, nie zusammen mit dem Stoff Schwarz. Angemessener wäre es wohl, zu sagen, das Phänomen Milch entstehe, wenn der Stoff Weiß und der Stoff Feucht (und weitere Stoffe) in einer Mischung dominieren, aber auf eine solche Theorie gibt es in den erhaltenen Fragmenten keinen Hinweis. Möglicherweise glaubte Anaxagoras, dieser Schwierigkeit mit einer Theorie der Aggregatzustände entgehen zu können, beziehungsweise, daß seine Physik überhaupt erst eine angemessen Grundlage einer erfolgreichen Theorie der Aggregatzustände bildet:

> Wir Skeptiker setzen das Begriffliche dem Erscheinenden entgegen, wie Anaxagoras angesichts der Tatsache, daß Schnee weiß ist, behauptete: Der Schnee ist fest gewordenes Wasser, Wasser ist schwarz, also ist auch der Schnee schwarz.

Es ist nun nicht anzunehmen, daß Anaxagoras beweisen wollte, der Schnee sei schwarz und erscheine als schwarz. Es wäre möglich, daß Anaxagoras an dieser Stelle sagen wollte, der Schnee erscheine als weiß, obwohl er eigentlich schwarz sei. Eine stimmigere Deutung ergibt sich, wenn wir folgende Annahme zugrunde legen: wenn das Wasser sich in Schnee verwandelt, dann beginnt der Anteil des Weißen über das Schwarze zu dominieren, und vermutlich auch umgekehrt: wenn der Anteil des Weißen aufgrund irgend eines Vorganges im Wasser zu dominieren beginnt, ein Vorgang, der in der Regel zu einem Dominieren auch des Festen und des Kalten führt, dann verwandelt sich Wasser in Schnee.

Wenn wir nun aber Schnee als Stoff auffassen, dann haben wir nun wenigstens einen Stoff gefunden, der kein Element ist: ein Ding bestünde demnach aus Schnee, wenn in ihm die Elemente Wasser und Weiß (und Kalt und Fest &c.) überwiegen, es gibt aber kein Element Schnee, dessen Vorhandensein und Überwiegen ein Ding zu Schnee machen würde. Ebenfalls kein Element ist wohl der Stoff „salziges Wasser“, aber hier sind unsere Nachrichten unsicher. Vermutlich hat Anaxagoras zu diesem Problem etwas zu sagen gehabt, aber es ist uns nicht mit hinreichender Ausführlichkeit überliefert worden.

Gemäß der Auffassung des Anaxagoras, daß jeder Stoff jeden anderen Stoff enthält, ist eine unwahrscheinlichere und phantastischere Deutung denkbar: demnach ist es reine Konvention, was wir als Stoff und was als Element betrachten. Der Stoff Schnee enthält die Elemente Wasser und Weiß und Kalt und Fest. Aber die Elemente Wasser und Weiß und Kalt und Fest sind ihrerseits auch keine Elemente, sondern nur Stoffe, die durch andere Elemente definiert werden. Von jedem Stoff läßt sich sagen, welche Elemente in ihm dominieren, und diese Elemente bilden gewissermaßen die Definition jenes Stoffes. Diese Definitionen sind aber alle zirkulär, unter den Elementen, deren Dominanz die Definition des Stoffes Wasser ausmacht, könnte auch wieder das Element Schnee sein, etwa so: Schnee ist eine Mischung, in der Wasser, Weiß, Kalt und Fest dominieren, Wasser ist eine Mischung, in der Schnee, Wasserflüssigkeit und Dampf dominieren, Weiß ist eine Mischung, in der Schnee, Kreide, Mehl und so weiter dominieren. In dieser Deutung ist jeder Stoff ein Element, aber kein Stoff ist elementar, für jeden Stoff gibt es eine Definition, aber die Definitionen sind zirkulär und begrifflich in sich geschlossen.

Leider besitzen wir keine Liste, was alles Anaxagoras für Stoffe oder für Elemente hielt. Denkbar wäre es, daß diese Liste von Elementen unendlich lange ist. Aristoteles deutet Anaxagoras in dieser Weise, wenn er sagt, Anaxagoras sage, „daß die Prinzipien unendlich viele sind“ [19]. Und Anaxagoras selbst schreibt:

> Gleichmäßig-zusammen waren [im Urzustand] die Sachen alle, unendlich sowohl der Zahl als auch der Kleinheit nach. [21]

und

> Wenn das der Fall ist, muß man zugeben, daß in all den aus Gesondertem zusammentretenden Dingen Mannigfaltigkeites sowie auch Allerlei enthalten ist, d. h. Samen von allen Sachen, welche sowohl allerlei Gestalten wie auch allerlei Farben und Wohlgeschmack haben. [24]

Die erste dieser beiden Stellen läßt sich so deuten (und so deutet sie auch der zitierte Übersetzer), daß im Urzustand unendlich viele verschiedene Sachen, also unendlich viele verschiedene Elemente vorlagen. Die Stelle läßt sich aber auch so deuten, daß das Universum aus unendlich vielen infinitesimal kleinen Atomen besteht. Dann gibt es die Möglichkeit, daß diese unendlich vielen Atome nicht alle der Art nach verschieden sind, sondern sich auf endlich viele Elemente aufteilen. Oder aber, daß wie bei Demokrit keine zwei Atome einander der Art nach gleich sind: wenn wir von Wasser sprechen, dann meinen wir im Grunde unendlich viele Varianten von Wasser, die alle Wasser hinreichend ähnlich sind, weil es keine zwei Wasser-Atome gibt, die einander völlig gleichen.

In dem zweiten angeführten Zitat spricht Anaxagoras von Allerlei und Samen von allen Sachen, auch das könnte unendlich viele verschiedene Elemente meinen. Anscheinend sind ja in jedem Ding Samen von allen Farben, und Farben scheint es unendlich viele verschiedene zu geben:

> Der hervorragende Naturphilosoph Anaxagoras klagt die Sinne ihrer Schwäche wegen an und sagt: "Infolge ihrer Kraftlosigkeit sind wir nicht imstande, das Wahre zu unterscheiden." Als zuverlässigen Grund ihrer Unzuverlässigkeit führt er die infinitesimalen Änderungen der Farben an. [78]

Wir können diese Stelle aber auch anders deuten. Der zentrale Gedanke bei Anaxagoras ist, wir haben es nun oft genug erwähnt, daß alle Dinge eine Mischung sind. Diese Ansicht ist nicht gerade intuitiv einsichtig (den meisten Menschen dürfte sie eher paradox oder gar widersprüchlich erscheinen). Anaxagoras muß also bestrebt sein, Argumente für seine ungewöhnliche Ansicht zu sammeln. Hier kommt es ihm nun sehr zustatten, daß Farbtöne sich anscheinend unbegrenzt mischen lassen und unendlich vieler verschiedener Schattierungen fähig sind. Wenn wir aber von vorneherein annehmen, daß es unendlich viele verschiedene Farbtöne an sich gibt, dann ist das Vorhandensein von unendlich vielen phänomenologischen Farbtönen nicht länger ein gutes Argument für die Gemischtheit von Allem. Wenn wir etwa auf die Farbe Flieder stoßen und annehmen, unter den unendlich vielen Farbtönen, die es gibt, sei auch Flieder, dann können wir annehmen, etwas Fliederfarbenes enthielte ausschließlich die Farbe Flieder und sonst nichts. Wenn wir dagegen die Farbe Flieder für eine Mischung der Farben Weiß, Blau und Violett halten, dann können wir argumentieren, daß ein fliederfarbenes Ding eine feine Mischung aus Weiß, Blau und Violett enthalten muß, und daß, da beliebige Varianten von Flieder möglich sind, beliebige Mischverhältnisse von Weiß, Blau und Violett möglich sind.

Das Vorhandensein unendlich vieler verschiedener phänomenologischer Farbtöne führt daher nicht zwingend zu der Annahme, daß es unendlich viele Farben unter den Elementen gibt, oder das Anaxagoras die Existenz von unendlich vielen verschiedenen Farben angenommen hätte.

Wir können daher auch annehmen, das Zitat von Anaxagoras sage lediglich, in jedem Ding seien unendlich viele Atome der endlich vielen Elemente, darunter aller endlich vielen Farben, vorhanden.

Wir müssen uns aber, wie angekündigt, noch etwas näher mit diesen Samen beschäftigen. Diese Samen besitzen nach Anaxagoras nicht nur „allerlei Farben und Wohlgeschmack", sondern auch „allerlei Gestalten". Um die infinitesimal kleinen Punkten des $\mathbb{R}^3$ kann es sich folglich kaum handeln, denn diese besitzen bekanntlich eben nicht allerlei Gestalt. Es bieten sich hier wieder verschiedene Möglichkeiten der Deutung an: Wir können annehmen, Anaxagoras hält „Gestalt" für eine Eigenschaft wie andere Eigenschaften auch, die einem Punkt nach Belieben zugeschrieben werden kann, so daß wir sagen können, ein bestimmter infinitesimaler (und damit eigentlich gestaltloser) Punkt gehöre zur Menge der Gegenstände mit der-und-der Gestalt. Oder Anaxagoras hält die Dinge für aus Atomen bestehend, wobei diese Atome in allen Größenskalen vorkommen, das heißt, jedes Atom hat eine bestimmte definierte Größe, es gibt aber kein kleinstes Atom, sondern in jedem Ding sind Atome von beliebiger Kleinheit enthalten, und diese Atome nennt Anaxagoras Samen. Oder aber die Samen sind eine Art von Stoffen. Dann gäbe es unendlich viele verschiedene Stoffe, und jedes Ding enthielte unendlich viele verschiedene Stoffe. Oder aber, und das scheint mir die vernünftigste und angemessenste Deutung, wir fassen die Samen als kleine Dinge auf (eben das ist ja auch die Bedeutung, die dieses Wort in der alltäglichen Sprache hat). Da wir ja zu der Meinung gekommen sind, daß es nach dem ersten Wirken des Geistes keine homogenen Mischungen mehr in der Welt gibt, enthält jedes Ding jeden Stoff nicht nur potentiell, sondern auch aktuell. Die Luft enthält die Stoffe, aus denen etwa Weizen hauptsächlich besteht, nicht nur potentiell, in der Gesamtmischung, sondern es gibt in jedem Teil der Luft kleine Bereiche, in denen die verschiedenen Weizenstoffe überwiegen, wenn auch diese Bereiche in der Regel sehr klein sind und mit unseren Sinnen nicht wahrnehmbar. Diese Bereiche sind die Samen, aus denen Weizen entstehen kann, wenn noch andere nötige Stoffe, wie sie sich in der Erde befinden, hinzukommen (vermutlich deshalb entstehen Pflanzen an der Grenze von Himmel und Erde). Möglicherweise weisen die Samen darüber hinaus eine spezielle Strukturiertheit auf, die es ihnen ermöglicht, Stoffe aus ihrer Umgebung zu akkumulieren und dadurch zu wachsen. Es ist anzunehmen, daß bei diesem Vorgang der Geist eine Rolle spielt.

Es ist denkbar, daß in der Welt des Anaxagoras strukturierte Aggregate wie die Samen, aber auch Tiere und Menschen, beliebige Größe besitzen können. Aufgrund der perfekten Skaleninvarianz der Physik des Anaxagoras gibt es jedenfalls nichts, was verhindern könnte, daß ein Lebewesen beliebiger Kompliziertheit auf einer beliebigen Größenskala auftritt. Es wäre deshalb möglich, daß jedes noch so kleine Ding nicht nur unendlich viele Dinge enthält, sondern auch unendlich viele Welten mit Sonne und Mond und Lebewesen und Menschen. Ohnehin wissen wir ja schon, daß unsere Weltordnung nicht die einzige ist, sondern andere Menschen in anderen Weltordnungen leben, und „daß es für die Menschen Städte gibt, die sie gemeinsam bewohnen, und gut bestelltes Ackerland, wie auch bei uns, und daß es für sie Sonne gibt und Mond und auch die anderen, wie auch bei uns, und daß die Erde für sie Mannigfaltiges und Allerlei wachsen läßt, wovon sie das Nützliche in ihre Wohnstätten bringen und es gebrauchen.“ [24]

Jedenfalls sind, nach dieser Deutung, die Samen keine eigenen Stoffe. Es ist daher möglich, Anaxagoras so zu deuten, daß es nur endlich viele verschiedene Stoffe gibt. Falls die griechische Sprache mächtig genug ist, die Welt vollständig zu beschreiben, dann gibt es nicht mehr verschiedene Stoffe, als es griechische Worte gibt, wie „Fleisch“ oder „Knochen“ oder „Hell“ oder „Trocken“ und so weiter.

Falls es aber doch unendlich viele Stoffe geben sollte, dann sind jedenfalls einige dieser Stoffe prominenter und wichtiger, als erstes einmal Äther und Luft, gefolgt von anderen häufig vorkommenden Stoffen. In praktischer Hinsicht wird es daher wohl genügen, sich mit nur endlich vielen Stoffen zu beschäftigen, da der unendliche Rest wohl jedenfalls eine vernachläßigbare Rolle spielt.

4 Anwendungen

4.1 Das ignorante Lob der Philosophie

Ich erwähnte es bereits, und es läßt sich ohnehin kaum verbergen: die Physik des Anaxagoras ist nicht die Physik unserer Welt. Das Gedankengebäude des Anaxagoras ist von großer Schönheit und Kompliziertheit, aber dessen ungeachtet ist es außerdem auch noch falsch. Dennoch meine ich, daß die Beschäftigung mit den Fragmenten und Ideen des Anaxagoras nicht völlig eitel ist. Auf jeden Fall scheint sie mir nützlich zu sein als ein Training unserer Phantasie. Der moderne Schulunterricht (einschließlich des Hochschulunterrichts) ist leider noch immer allzu sehr, wie der Schulunterricht aller Zeiten, darauf ausgerichtet, zu vermitteln, was wir alles schon wissen und wie wir meinen, daß die Welt ist. Und so lernen die Menschen von klein auf, daß die Welt aus Atomen zusammengesetzt ist, und es scheint ihnen etwas anderes gar nicht möglich zu sein. Das aber ist ein höchst bestürzender Irrtum, denn es ist im Gegenteil eine Unendlichkeit an alternativen Theorien möglich, und wer sich dieser Alternativen nicht bewußt ist, wird für immer ignorant gegenüber der eigenen Ignoranz bleiben.

Vor einiger Zeit erschien eine Darstellung der Geschichte der Philosophie für Kinder, die den Vorzug hatte, in einer für Laien verständlichen Sprache verfaßt zu sein, so daß dieses Buch auch unter Erwachsenen viele Leser fand. Dieses Buch warb für die Philosophie und versuchte die Behauptung zu unterstützen, es sei die Philosophie etwas großartiges, allmächtiges, imstande, durch schieres Nachdenken die Rätsel der Welt zu lösen und dem Schöpfer von Angesicht zu Angesicht gegenüber zu treten. Um dieser Propaganda willen wurde die Geschichte der Philosophie gewaltsam verzerrt und entstellt und in eine Geschichte des unaufhaltsamen Fortschrittes und der heroischen Siege umgemünzt. Dem staunenden Publikum wurde da die Geschichte der antiken Naturphilosophen präsentiert: diese Philosophen hatten ein Problem, sie hätten gerne gewußt, woraus die Welt besteht. Und so haben sie verschiedene Theorien aufgestellt, eine immer toller als die andere. Und schließlich tritt Demokrit auf, der dieses schwierige Problem tatsächlich löst, indem er herausfindet, wie sich die Sache in Wirklichkeit verhält, Ende gut, alles gut, Beifall, Vorhang, und wenn sie nicht gestorben sind, so freuen sie sich noch heute. So aber ist ja die Geschichte nicht wirklich verlaufen. Es ist keineswegs so, daß Demokrit die wahre Natur der Dinge entdeckt und diese Erkenntnis allgemein anerkannt worden wäre.

Beinahe hätte statt Demokrit die degenerierte und durch wirre Spekulationen verunklärte Atomtheorie Platons den Sieg davon getragen. Tatsächlich durchgesetzt hat sich aber bekanntlich die Theorie des Aristoteles. Und nach Aristoteles kann es keine Atome geben, weil es keine Leere geben kann. Der Beweis des Aristoteles, warum es keine Leere geben kann, ist wahrhaft beeindruckend in seiner Unverbindlichkeit, was autoritätsgläubige Geister des Mittelalters nicht gehindert hat, diesen Beweis mit ihrem eigenen wertlosen scholastischen Geschwätz zu ergänzen. Wären diese traurigen Gelehrten etwas weniger daran interessiert gewesen, wie die Welt ist, und etwas mehr daran, wie sie auch hätte sein können, dann wäre uns vielleicht etwas mehr von dem ausgedehnten und umfangreichen Werk des Demokrit erhalten geblieben als bloß ein paar enttäuschende Fetzen und Randbemerkungen und das Gewäsch der ahnungslosen Klatschbase Diogenes Laertios.

Für Kinder, könnte es scheinen, mag es in Ordnung sein, die Mäander der Geschichte der Philosophie zu glätten und zu vereinfachen und sie nicht mit der ganzen Geschichte zu überfordern. Wenn wir aber unseren Kindern keine intellektuelle Redlichkeit beibringen, wie wollen wir dann intellektuelle Redlichkeit unter Erwachsenen erwarten? Nicht für Kinder geschrieben hat und nicht von Kindern gelesen wurde etwa Karl Marx, ein weiterer Anhänger des Demokrit, der sich blenden ließ von einer ganz oberflächlichen Ähnlichkeit zwischen der Theorie des Demokrit und modernen Theorien, und mit Marx eine neue sterile scholastische Tradition, die dekretierte, von allen antiken Philosophen dürfe nur Demokrit geliebt werden, alle anderen Philosophen seien entweder Agenten des Klassenfeindes oder in ihrem Bewußtwerdungsprozeß auf halber Strecke stecken geblieben[2]. In Wahrheit ist die Atomtheorie des Demokrit eine jener alten, biederen Theorien, die ohne magische Fernwirkungen auszukommen sucht und sich auf die Prinzipien Stoß und Zug beschränkt, die deshalb ihre Atome mit Haken und Ösen ausstatten muß, während die Verwendung von magischen Fernwirkungen seit Newtons Gravitationskraft in der Physik üblich geworden ist und jede moderne Atomtheorie diese magischen Fernwirkungen bis vor kurzem unabdingbar benötigte, sie werden allerdings nicht mehr „magische Fernwirkungen" genannt, sondern „Felder". Erst in jüngster Zeit werden diese Felder durch Botenteilchen ersetzt, diese Botenteilchen sind aber noch weniger mit den Demokritschen Atomen zu vergleichen: ein zeitgenössisches Teilchen hat keine Haken und bewegt sich auf allen möglichen Bahnen gleichzeitig, und es mit den Demokritschen Atomen gleichzusetzen ist Heuchelei.

Es geht mir nicht darum, Anaxagoras gegen Demokrit auszuspielen, den ich ebenso sehr liebe. Aber ich halte es für einen bloßen Zufall, daß die Theorie des Demokrit eine gewisse oberflächliche Ähnlichkeit mit modernen Theorien hat, im Gegensatz zu den Theorien anderer Naturphilosophen, und deshalb scheint mir die Theorie des Demokrit nicht per se interessanter als die des Anaxagoras. Wenn wir aber in den Schriften der Alten nichts anderes wiederfinden als verzerrte und verwirrte Vorläufer unserer eigenen Lieblingsansichten, dann wird es uns wenig Gewinn bringen, die Schriften der Alten überhaupt zu öffnen. Wenn von den Naturphilosophen nicht mehr zu sagen ist, als daß einer von ihnen beinahe die moderne Atomtheorie entdeckt hätte, über die aber jedes Anfängerbuch der Physik oder Chemie Fundierteres zu sagen hat als Demokrit, dann sind die Naturphilosophen uninteressante Langweiler.

Anaxagoras sagt, Luft enthalte Samen, und im Kontakt mit der Erde entstehen Pflanzen. Eine beliebte Deutung besteht darin, zu sagen, Aha, hier finden sich Überreste des mythologischen Denkens, denn dem mythologischen Denken zufolge befruchtet der Himmel die Erde. Besonders spannend ist eine solche mythologische Deutung nicht, sie macht Anaxagoras dümmer als nötig. Interesanter ist doch zu fragen, was diese Samen eigentlich sind, Stoffe, Atome, Dinge oder Aggregate, oder ob sich hier vielleicht eine neue und unerhörte Deutung finden läßt.

Der Cantorstaub diente lange Zeit und dient meist noch immer als ein Gegenbeispiel. Gibt es eine überabzählbare Menge getrennter Punkte? Ja, die gibt es, siehe den Cantorstaub. Gibt es eine stetige Abbildung zwischen der Geraden und der Ebene? Ja, die gibt es, siehe die Peanokurve. Gibt es eine Kurve, die nirgends differenzierbar ist? Gibt es eine Kurve, die nirgends stetig ist? Gibt es eine Kurve, in der jeder Punkt ein Verzweigungspunkt ist? Auf solche Fragen ist die Antwort: Ja, es gibt ein Monster, das als Beispiel gegen die Anschauung herhalten kann. Dem Einsatz von Benoît Mandelbrot ist es zu danken, daß viele dieser Monster nicht länger als Monster betrachtet werden, sondern als Gebilde, die geeignet sind, die Wirklichkeit zu beschreiben, als Bewohner der wirklichen Welt. Hätten wir aber von Anfang an die Physik des Anaxagoras ernst genommen, so wären wir gar nicht erst in die Verlegenheit gekommen, diese Monster, die den alten Namen „Monster" abgelegt und den wohlklingenderen Namen „Fraktale" angenommen haben, für Monster zu halten. Statt unseren Ekel vor der Geburt eines neuen Monsters bei jeder neuen mathmatischen Abhandlung, die ein exotisches Gegenbeispiel verwendet, hätten wir

[2] Dieses Elend hört sich dann so an: „Den Weltbildungsprozeß, der sich noch immer fortsetzt, faßte Anaxagoras ähnlich wie Demokrit. [...] Anaxagoras gelingt es jedoch nicht, den qualitativen Unterschied zwischen innerer und erscheinender Struktur der Materie zu erfassen. Er bleibt bei der naiven Vorstellung stehen, daß alles Sichtbare unendlich klein im Urstoff enthalten sei." [Erhard Lange u. Dietrich Alexander [Hrsg.], Philosophenlexikon, Berlin 1987, Stichwort „Anaxagoras"]

unsere Freude über die Einführung einer neuen Interpretationsmöglichkeit des Anaxagoras ausdrücken können.

Unsere Welt scheint im Kleinsten eine Schranke aufzuweisen. Es ist nicht möglich, beliebig komplizierte Dinge beliebig klein zu bauen, es ist auch nicht möglich, einen Menschen ohne weiteres auf ein Zehntel seiner Größe zu schrumpfen, weil wir ihn dann nur noch mit einem Tausendstel seiner Atome zusammensetzen können. Trotzdem können einige Aspekte unserer Welt vielleicht doch nach Art des Anaxagoras beschrieben werden. Wenn wir Bodenschätze mit statistischen Methoden betrachten und die atomare Struktur der Welt ignorieren, dann besteht eine zweckmäßige Annahme über die Verteilung der verschiedenen uns interessierenden Stoffe, daß sie einer Verteilung nach Anaxagoras folgen. Wenn wir bestimmte Materiedichten als „Stoff" auffassen, dann erweist sich das Universum im großen Maßstab als hierarchisch strukturiert, wobei jeder „Stoff" jeden anderen „Stoff" enthält: Gegenden mit geringer Dichte enthalten einzelne Teile (Galaxienhaufen, Galaxien) mit hoher Dichte. Wenn wir die platonischen Ideen oder Allgemeinbegriffe einer Sprache oder bestimmte psychologische Konzepte als „Stoffe" auffassen, dann können wir ebenfalls versuchen, ob wir dem Satz, daß jeder „Stoff" jeden „Stoff" enthält, einen Sinn abgewinnen können.

4.2 Der Laplacesche Dämon im Exil

Im Kampf freier Wille gegen Determinismus erfreut sich der Laplacesche Dämon großer Bekanntheit. Nahezu jeder, der sich mit diesem Krieg beschäftigt, ist wohl folgendem Zitat begegnet:

> Eine Intelligenz, welche für einen gegebenen Augenblick alle in der Natur wirkenden Kräfte sowie die gegenseitige Lage der sie zusammensetzenden Elemente kennte und überdies umfassend genug wäre, um diese gegebenen Größe der Analysis zu unterwerfen, würde in derselben Formel die Bewegungen der größten Weltkörper wie des leichtesten Atoms umschließen; nichts würde ihr ungewiß sein und Zukunft und Vergangenheit würden ihr offen vor Augen liegen.[3]

Es ist, gelinde gesagt, unklar, ob die Welt, die wir bewohnen, deterministisch ist oder nicht. Die Standarddeutung besagt, sie sei nicht deterministisch, es ist jedoch alles andere als klar, was das bedeutet (es ist durchaus nicht wahr, die moderne Physik habe bewiesen, die Welt sei indeterministisch – die Viele-Welten-Deutung der Quantenmechanik ist problemlos mit dem Determinismus vereinbar). Es ist daher nützlich, sich im Geist verschiedene Spielzeugwelten zurecht zu legen, die wir vollständig überschauen und von denen wir dann auch sagen können, ob sie deterministisch sind oder nicht.

Eine solche Spielzeugwelt wäre etwa die Descartesche Welt, in der es nur Atome, Stoß und Zug gibt. Noch übersichtlicher ist ein noch künstlicheres Universum wie das Spiel des Lebens, einem von Conway erfundenem zellulären Automaten. Dieses Spiel wird auf einer unendlichen Ebene von diskreten, abzählbar vielen Gitterpunkten gespielt, die in einem von zwei Zuständen sein können. Die Zeit schreitet in diskreten Intervallen, von Runde zu Runde fort, und der Gesamtzustand des Universums ist von dem vorangegangenen Zustand vollständig determiniert, so daß es sich um ein Spiel mit null Mitspielern handelt. Frei festgelegt werden kann nur der Anfangszustand.

Dieses Universum ist offensichtlich ein Musterfall für ein deterministisches Universum. Für ein solches Universum kann es einen Laplaceschen Dämon geben, mit einer kleinen Einschränkung:

[3] Pierre Simon de Laplace, Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit, Frankfurt a.M. 1966

kennt der Laplacesche Dämon vollständig den Zustand eines Spiel-des-Lebens-Universums, dann kann er auch den Zustand des Universums in jeder zukünftigen Runde berechnen. Da aber verschiedene Zustände der Vergangenheit zum gleichen Zustand in der Gegenwart führen können, im Gegensatz vermutlich zum Descartes-Universum, läßt sich die Vergangenheit nicht eindeutig rekonstruieren. Darüber hinaus gibt es Zustände, technisch „Garten Eden“ genannt, von denen sich zeigen läßt, daß kein vorangegangener Zustand sie erzeugen kann. Unter einem „Laplaceschen Dämon“ wollen wir deshalb von nun an nur einen Dämon verstehen, der mindestens die Zukunft voraussagen kann, während ihm die Vergangenheit eventuell unbekannt ist.

Ein Computer, der zukünftige Zustände dieses zellulären Automaten berechnet, ist für dieses Universum ein Laplacescher Dämon. Andererseits ist das Universum des Spiels des Lebens reichhaltig genug, daß es eine Universelle Turing-Maschine enthalten kann. Kann das Spiel des Lebens auch seinen eigenen Laplaceschen Dämon enthalten?

Eine sparsam konstruierte Turing-Maschine innerhalb des Spiel des Lebens wird als Informationsträger zweckmäßigerweise Gebilde namens „Gleiter“ verwenden. Ein Gleiter verbraucht (einschließlich eines leeren Randes oben und links) ein Array von 4 mal 4 Gitterpunkten. Wenn wir dieser Turing-Maschine nun mitteilen wollen, welche Gitterpunkte im Universum in welchem der beiden Zustände sind, dann können wir zu dieser Beschreibung einen Gleiterstrahl verwenden. Dieser Gleiterstrahl ist aber seinerseits ein Teil des Universums, der beschrieben werden muß, er muß also seine eigene Beschreibung enthalten und deshalb unendlich lang sein.

Wir können diese Lehre sofort auf unser Universum übertragen. Nehmen wir an, wir kämen auf die Idee, Position und Impuls von jedem Teilchen im Universum mit Papier und Bleistift aufzuschreiben und dann mit Papier und Bleistift die zukünftigen Zustände des Universums auszurechnen. Für jedes Atom bräuchten wir viele Atome und Moleküle für Graphit und Zellulose, so daß unser Papierbogen mehr Teilchen enthalten müßte, als überhaupt im Universum vorhanden wären.

Eine sparsamere Repräsentation wäre, für jedes Atom nur ein einziges Atom als Repräsentanten zu wählen. Die Position des zu repräsentierenden Atoms wird mit Hilfe des repräsentierenden Atoms gespeichert, der Impuls des zu repräsentierenden Atoms wird als Impuls des repräsentierenden Atoms codiert. Zweckmäßigerweise werden repräsentiertes und repräsentierendes Atom identisch sein. In diesem Fall ist das ganze Universum der Laplacesche Dämon, der die zukünftigen Zustände des Universums in Echtzeit voraussagt. In diesem sehr bescheidenen Sinn ist jedes, sogar ein indeterministisches Universum sein eigener Laplacescher Dämon, allerdings kein besonders interessanter.

Fragen wir also neu und schärfer: kann ein Universum seinen eigenen Laplaceschen Dämon als echte, örtlich beschränkte Teilmenge enthalten? Ein solches Gebilde wollen wir „echter Laplacescher Dämon“ nennen. Nach unseren bisherigen Überlegungen scheint die Antwort „Nein“ zu lauten. Noch aber haben wir längst nicht alle Möglichkeiten erschöpft. Wir könnten versuchen, ein Atom mit weniger als einem Atom zu codieren. Das ist natürlich nur möglich, wenn uns das Universum entsprechend entgegenkommt und eine geordnete, nicht chaotische Struktur besitzt, wenn die Beschreibung des Universums sich komprimieren läßt.

Für einen besonders einfachen Spezialfall des Spiel des Lebens können wir sogar eine Turing-Maschine explizit angeben, die für dieses Universum einen Laplaceschen Dämon darstellt. Wir codieren den Zustand des Universums mit Hilfe eines Gleiterstrahles, wobei ein leerer Gleiterstrahl (der keinen einzigen Gleiter enthält) bedeutet, daß das Universum vollkommen leer ist. Die Maschine gibt als Antwort sämtliche zukünftigen Zustände des Universums aus. Sämtliche zukünftige Zustände des Universums sind eine abzählbare Folge von Ebenen aus abzählbar vielen

Gitterpunkten, läßt sich also in eine Null-Eins-Folge codieren. Die Maschine gibt diese Null-Eins-Folge als Gleiterstrahl aus, allerdings nur, wenn das Universum so einfach ist, daß es sich leer komprimieren läßt (ein Universum läßt sich genau dann leer komprimieren, wenn es leer ist). Falls das Universum nicht derart einfach ist, dann ist die Antwort der Maschine nicht definiert. Eine solche Maschine läßt sich einfach genug konstruieren: nämlich als leere Maschine. Für ein leeres Spiel des Lebens ist demnach die leere Menge ein echter Laplacescher Dämon, der in einer einzigen Runde sämtliche zukünftigen Zustände des Universums voraussagt.

Für unser eigenes Universum läßt sich ein ebenso einfaches Beispiel nicht so leicht konstruieren, da es aus quantenmechanischen Gründen ein gänzlich leeres Universum nicht geben kann. Es kann aber jedenfalls Universen (auch nicht-leere) geben, die solche Symmetrieeigenschaften und komprimierbare Strukturen besitzen, daß eine echte Teilmenge des Universums genügend Material bietet, um den aktuellen Zustand des Universums vollständig zu codieren und zukünftige Zustände schneller als in Echtzeit vorauszusagen.

Allerdings gibt es keinen besonderen Grund für die Annahme, daß unser Universum zu diesen besonders komprimierbaren Universen gehören könnte. Eine solche Annahme wäre allenfalls plausibel, wenn wir die Welt für die Schöpfung eines Gottes mit beschränkten Ressourcen halten, aber außer in romantischen Science-Fiction (in denen unsere Welt der Traum oder die Erfindung von Menschen der nächsthöheren Welt ist), ist diese Theorie nicht verbreitet, und weder die Theisten, die Gott unbegrenzte Ressourcen zuschreiben, noch die Materialisten, die die Welt nicht für eine Schöpfung halten, glauben an eine solche Möglichkeit.

Das vollständige Codieren der Welt in einem Teilbereich der Welt hat sich vor allem deshalb als problematisch erwiesen, weil wir unser Universum als aus diskreten Teilchen bestehend, als granulär betrachtet haben (das Spiel des Lebens und vielleicht auch das Quantenuniversum sind granulär auch in Bezug auf Zeit und Raum, während die Atome im alten mechanischen Universum einen kontinuierlichen Raum und eine kontinuierliche Zeit bewohnen). Nicht jedes denkbare Universum ist aber granulär, beispielsweise nicht die wunderbare Welt des Anaxagoras. Wenn wir nach einem Beispiel für ein Universum suchen, das seinen eigenen echten Laplaceschen Dämon enthält, dann sollten wir auch Welten nach Art des Anaxagoras betrachten.

Gegeben sei also nun eine Welt nach Art des Anaxagoras. In dieser Welt sei ein Ding, das der Laplacesche Dämon ist. Dieser sei ein echter Laplacescher Dämon, das heißt, dieses Ding füllt nicht die ganze Welt aus. In diesem Laplaceschen Dämon denken wir uns nun einen Teil, den wir die „Simulation" nennen können. Die Simulation ist ein perfektes Abbild des Universums als Ganzem. Das macht es zwingend erforderlich, daß die Simulation ihrerseits einen echten Laplaceschen Dämon mit einer eigenen Simulation enthält, und so fort bis ins Unendliche, was aber in einem Universum nach Anaxagoras nichts ernsthaft Überraschendes oder Ungehöriges darstellt.

Da ja der Laplacesche Dämon die Zukunft schneller als in Echtzeit voraussagen können muß, damit wir ihn für interessant halten, nehmen wir weiter an, in der Simulation verändere sich das gespiegelte Universum doppelt so schnell, wie das Universum als Ganzes. Wenn also eine Stunde vergangen ist, dann zeigt die Simulation nicht mehr den Zustand des gesamten Universums, wie er jetzt gerade ist, sondern wie er in einer weiteren Stunde sein wird. Die Simulation enthält außerdem eine Simulation, die den Zustand des Universums wiederspiegelt, wie er in drei Stunden sein wird, und diese Simulation enthält eine Simulation, die den Zustand des Universums in sieben Stunden widerspiegelt.

Wie kann nun der Laplacesche Dämon an diese Informationen herankommen? Wenn wir uns die Simulation kugelförmig denken, dann kann ja der Dämon nicht einfach in diese Kugel hineingreifen, ohne Störungen in der Simulation zu verursachen. Dieses Problem entsteht aber nur durch unsere mangelnde geometrische Phantasie. Die Simulation kann ja auch ganz andere geometrische Gestalt haben, sie kann etwa ein Fraktal sein, in dem jeder Punkt ein Randpunkt ist, weil die ganze Simulation von feinen und feinsten Adern durchzogen ist. Der Laplacesche Dämon kann mithin jeden Punkt der Simulation berühren, Informationen ablesen und an den Rest des Universums weiterleiten.

Wie steht es nun in diesem Universum mit sich selbst verhindernden Prophezeiungen? Wenn mir etwa ein bekannter Laplacescher Dämon mitteilt, daß ich morgen bei einem Flugzeugabsturz ums Leben kommen werde, dann werde ich morgen brav zu Hause bleiben und mit dem Leben davonkommen, und die Prophezeiung des Laplaceschen Dämons wurde widerlegt.

Aber wenn so etwas geschehen würde, dann hätte ja schon der simulierte Dämon meine Simulation gewarnt, meine Simulation wäre zu Hause geblieben, und der Dämon hätte keinen Anlaß mehr gehabt, mich zu warnen.

Der simulierte Dämon seinerseits kann meine Simulation nicht gewarnt haben, wenn der Dämon mich nicht warnt, weil er ja eine Simulation des künftigen Verhaltens des Dämons ist.

Es kann also der simulierte Dämon meine Simulation nicht warnen und der Dämon mich nicht warnen. Der Dämon kann widerspruchsfrei nur existieren, wenn er sein Vorauswissen für sich behält. Und unter dieser Voraussetzung kann das Universum des Anaxagoras sogar von unendlich vielen Laplaceschen Dämonen bevölkert werden.

Wir haben dann aber folgende Situation: in unserem Universum gibt es beliebig viele Laplacesche Dämonen, die aber stumm sind (oder sich jedenfalls nicht als Laplacesche Dämonen zu erkennen geben). Für uns macht es daher nicht den geringsten Unterschied, ob es diese Laplaceschen Dämonen nun gibt oder nicht, beziehungsweise ob diese Dinge nun Laplacesche Dämonen sind oder nicht, und es gibt für uns als Bewohner dieses Universums keine Möglichkeit, je herauszufinden, wie viele Laplacesche Dämonen es in unserem Universum gibt und ob es überhaupt welche gibt. Wenn wir Occams Prinzip anwenden, dann müssen wir schließen, daß es in unserem Universum keine Laplaceschen Dämonen gibt.

Und dieser Schluß ist vernünftig. Denn unser Universum besteht aus zwei sehr verschiedenen Teilen: zum einen dem Teil, der keine Laplacesche Dämonen enthält, zum anderen aus dem Rest. Wir aber bewohnen ausschließlich den ersten Teil, und für uns macht es wenig Sinn, das Zusammengesetzte aus erstem und zweiten Teil als „unser Universum“ zu bezeichnen, unser Universum besteht lediglich aus dem ersten Teil, und der erste Teil enthält in der Tat keine Laplaceschen Dämonen.

Die Konstruktion eines Laplaceschen Dämonen stößt mithin nicht nur in dem speziellen Universum, das wir zufällig bewohnen, auf Schwierigkeiten, sondern selbst in einem Universum, das wir eigens in Hinblick auf die Konstruierbarkeit eines Laplaceschen Dämonen erdacht haben.

Eine verbreitete These besagt, daß Determinismus und freier Wille einander ausschließen. Eine häufige Begründung dieser These rekuriert auf den Laplaceschen Dämon, derart, daß gesagt wird: trifft der Determinismus zu, dann kann es einen Laplaceschen Dämonen geben, gibt es aber einen Laplaceschen Dämon, dann kann es keinen freien Willen geben.

Ein religiöser Mensch wird aber zumeist keine Schwierigkeit darin sehen, daß Gott die Zukunft vollkommen offenbar ist, Gott also ein Laplacescher Dämon ist, und trotzdem die Menschen einen freien Willen besitzen. Wir müssen also fragen, ob die Schlußweise, die Möglichkeit eines

Laplaceschen Dämons schließe einen freien Willen aus, sich nicht lediglich auf die Möglichkeit eines Laplaceschen Dämons innerhalb unserer eigenen Welt bezieht, während die Existenz eines Laplaceschen Dämons im metaphysischen Irgendwo uns nichts angeht und mit unserem freien Willen nichts zu tun hat. Wenn dem so ist, dann ist die These von der Unvereinbarkeit von Determinismus und freiem Willen nicht in der erwähnten Weise begründbar, da wir ja gezeigt haben, daß aus dem Determinismus keineswegs die Möglichkeit der Konstruktion eines Laplaceschen Dämonen folgt.

Literatur

MANSFELD, Jaap (Hrsg./Ü.) 1986: Die Vorsokratiker II, Stuttgart

14.4.2001 bis 18.4.2001